Passerelle vers l'Agrégation Interne (Algèbre/Géométrie) – Feuille 1

1 Un peu d'algèbre linéaire

Soit K un corps, dans la pratique cela sera souvent celui des nombres réels ou celui des nombres complexes. Mais parfois on peut aussi prendre pour K le corps des nombres rationnels (il y a aussi les corps finis, ou plus généralement les corps de caractéristique non nulle, mais pour le moment on reste avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.)

> Chacun des exercices qui suit est une sorte de problème de synthèse de notions de base en algèbre linéaire. Chaque solution peut nécessiter une discussion approfondie et donc prendra du temps !

1.1 Tout ce qui a trait à l'indépendance linéaire, à la notion de système lié ou au contraire linéairement indépendant, à la notion de base et de dimension se ramène finalement à la propriété cruciale suivante des systèmes d'équations linéaires : *tout système linéaire homogène avec strictement moins d'équations que d'inconnues admet une solution non triviale*. Expliquez pourquoi l'algorithme du pivot de Gauss pour la réduction des systèmes linéaires donne une façon de prouver cet énoncé crucial.

1.2 (Théorie de la dimension) Soit E un espace vectoriel : on suppose qu'il est engendré par un nombre fini N de vecteurs. Montrer que tout système de $N + 1$ vecteurs est lié. Montrer que tout système libre possède au plus N vecteurs. Soit d_1 la cardinalité maximale d'un système libre et d_2 la cardinalité minimale d'un système générateur. Montrer $d_1 = d_2$. On note $\dim E$ cet entier, et on pose $\dim E = \infty$ si aucun système générateur fini ne peut être trouvé. Montrer que tout système de plus de $\dim E$ vecteurs est lié et que tout système libre a au plus $\dim E$ vecteurs. Montrer que tout système libre de $\dim E < \infty$ vecteurs est générateur et que tout système générateur de $\dim E < \infty$ vecteurs est libre. Soit $f : E \to F$ un morphisme surjectif, montrer $\dim E \geqslant \dim F$, soit $f : E \to F$ injectif, montrer $\dim E \leqslant \dim F$.

1.3 (Théorème du rang) Soit E de dimension finie et $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Montrer $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$. Notez que

$\dim \operatorname{Im} f$ s'appelle aussi le rang de f. On ne suppose plus $\dim E < \infty$ mais seulement $\dim \operatorname{Ker} f < \infty$ et $\dim \operatorname{Im} f < \infty$, prouvez alors qu'en fait E est effectivement de dimension finie. Montrez que la formule du rang est valable en autorisant $+\infty$ pour chacun de ses trois termes.

1.4 (Rang d'une matrice) Le rang d'une matrice (rectangulaire) est celui de l'endomorphisme associé, c'est-à-dire donc la dimension de l'espace engendré par les colonnes. Comment prouvez vous qu'il est identique avec la dimension de l'espace engendré par les lignes ?

On va maintenant faire un problème sur une notion qui n'apparaît qu'en dimension infinie. Tout d'abord, une définition : soit $f : E \to F$, on dira que f est d'indice fini si et $\operatorname{Ker} f$ et $F/\operatorname{Im} f$ sont tous deux de dimensions finies, et on pose $\operatorname{ind} f = \operatorname{codim}_F \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Ker} f$.

1.5 Que vaut $\operatorname{ind} f$ lorsque E et F sont tous deux de dimensions finies ? En particulier lorsque f est un endomorphisme ? Donner des exemples d'endomorphismes f pour lesquels $\operatorname{ind} f \neq 0$.

L'objectif est de prouver le théorème avancé suivant : *si* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont d'indices finis alors* $g \circ f$ *également et*

$$\operatorname{ind} g \circ f = \operatorname{ind} f + \operatorname{ind} g$$

1.6 On suppose tout d'abord que g est injective. Soient $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants et engendrant un complémentaire à $\operatorname{Im} f$ dans F et $w_1, \ldots, w_m$ linéairement indépendants et engendrant un complémentaire à $\operatorname{Im} g$ dans G. Prouvez que $g(v_1), \ldots, g(v_n), w_1, \ldots, w_m$ forment un système libre complémentaire dans G à $\operatorname{Im} g \circ f$. Conclure la preuve du Théorème dans ce cas.

1.7 On suppose maintenant que g est surjective et que $\operatorname{Ker} g$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $v_0 \in F$. On distingue deux sous-cas :

1. v_0 est dans l'image de f,
2. il n'y est pas.

Prouvez que dans le premier cas $\dim \operatorname{Ker} g \circ f = 1 + \dim \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{codim} \operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{codim} \operatorname{Im} f$, tandis que dans le deuxième cas $\dim \operatorname{Ker} g \circ f = \dim \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{codim} \operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{codim} \operatorname{Im} f - 1$. En déduire que dans les deux cas $g \circ f$ est d'indice fini et $\operatorname{ind} g \circ f = \operatorname{ind} f - 1 = \operatorname{ind} f + \operatorname{ind} g$.

1.8 Conclure la preuve du théorème de l'indice.