Deux méthodes, valables sur tout corps, pour montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique

Jean-François Burnol

Jeudi 19 mars 2020

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Soit $n > 0$ un entier naturel et A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, de taille $n \times n$. Nous allons montrer :

$$\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA}) \tag{1}$$

1re méthode Si A est inversible :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB}) &= \det(\mathrm{XAA}^{-1} - \mathrm{ABAA}^{-1})\\ &= \det\big(\mathrm{A}(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA})\mathrm{A}^{-1}\big)\\ &= \det \mathrm{A} \cdot \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA}) \cdot \det \mathrm{A}^{-1}\\ &= \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{BA})\end{aligned}$$

Ceci est une identité dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, algèbre des polynômes en l'indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Considérons maintenant $\mathrm{L} = \mathbb{K}(\mathrm{Y})$ le corps des fractions rationnelles en une indéterminée Y. La matrice $\mathrm{A} - \mathrm{YI}_n$ a comme déterminant un polynôme en Y à coefficients dans $\mathbb{K}$, ce polynôme est de degré n et en particulier il est non nul. Donc $\mathrm{A} - \mathrm{YI}_n \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathrm{L})$ est une matrice inversible et par conséquent par le résultat précédent

$$\det(\mathrm{XI}_n - (\mathrm{A} - \mathrm{YI}_n)\mathrm{B}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{B}(\mathrm{A} - \mathrm{YI}_n))$$

vaut dans $\mathrm{L}[\mathrm{X}]$. Mais chacun des deux déterminants est en fait dans $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \subset \mathbb{K}(\mathrm{Y})[\mathrm{X}] = \mathrm{L}[\mathrm{X}]$. Il ne reste plus qu'à substituer $\mathrm{Y} = 0$ dans cette identité entre deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ en les deux indéterminées X et Y.

2e méthode Elle est plus courte et plus puissante, mais un peu plus difficile à mémoriser. Plus puissante car elle donne le théorème plus général suivant :

Théorème 1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit n, m deux entiers naturels non nuls et $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors*

$$\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB})\mathrm{X}^m = \det(\mathrm{XI}_m - \mathrm{BA})\mathrm{X}^n \tag{2}$$

Démonstration. Elle repose sur des calculs de matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix}\mathrm{XI}_n & \mathrm{A}\\ 0_{m,n} & \mathrm{I}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I}_n & -\mathrm{A}\\ -\mathrm{B} & \mathrm{XI}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB} & 0_{n,m}\\ -\mathrm{B} & \mathrm{XI}_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I}_n & -\mathrm{A}\\ -\mathrm{B} & \mathrm{XI}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{XI}_n & \mathrm{A}\\ 0_{m,n} & \mathrm{I}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{XI}_n & 0_{n,m}\\ -\mathrm{XB} & \mathrm{XI}_m - \mathrm{BA}\end{pmatrix}$$

Toutes les matrices sont de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} \\ \mathrm{W} & \mathrm{Z} \end{smallmatrix}\right)$ avec U de taille $n \times n$, V de taille $n \times m$, W de taille $m \times n$ et Z de taille $m \times m$. On a utilisé pour le calcul que multiplier à gauche par I_n ou à droite par I_m ne changeait pas une matrice de taille $n \times m$. En passant aux déterminants on obtient

$$\mathrm{X}^n \left| \begin{smallmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ -\mathrm{B} & \mathrm{XI}_m \end{smallmatrix} \right| = \mathrm{X}^m \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{AB}) = \mathrm{X}^n \det(\mathrm{XI}_m - \mathrm{BA}) \tag{3}$$

Ce qui donne notre théorème. □

Remarque : si $n > m$, on en déduit que 0 est racine de multiplicité au moins $n - m$ du polynôme caractéristique de AB. Mais en fait B étant de rang au plus m, il en est de même de AB : le morphisme $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ de matrice AB dans la base canonique se factorise par $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ donc a une image de dimension au plus m. Et le théorème du rang montre que son noyau a dimension au moins $n - m$. Ce qui est plus fort que de dire que 0 a multiplicité au moins $n - m$ comme racine du polynôme caractéristique.