Théorème de Bunt-Kritikos (dit théorème de Motzkin)

Jean-François Burnol, 10 février 2020 (v1), 3 mars 2020 (v2)

Énoncé Soit $E = \mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit C une partie non vide. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) C est un convexe fermé,

(2) pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $y \in C$ tel que $d(x, y) = \inf_{z\in C} d(x, z)$.

Dans la suite on utilisera à la fois les notations $d(x, y)$ et $\|\overrightarrow{xy}\|$, et on utilisera aussi des lettres majuscules pour les points.

Le but est de montrer (2) $\Rightarrow$ (1), la direction (1) $\Rightarrow$ (2) étant un résultat plus connu et sur lequel nous ne revenons pas. On suppose donc (2). On pose $d_C(x) = \inf_{z\in C} d(x, z)$. On note $\pi(x)$ l'élément unique de C dont l'existence est assurée par (2). Bien sûr $\pi(x) = x \iff x \in C$.

Le théorème a été démontré par Bunt (1934) et Kritikos (1938) (puis Jessen (1940)). On l'attribue très souvent au seul Motzkin mais ses articles de 1935 ne traitaient que $n = 2$. Je tiens ces informations d'un article de Deutsch de 1993. Le livre *Mathématiques générales pour l'agrégation*, 2e ed. (1997) de Tauvel attribue le théorème à Motzkin en suivant en cela *Convex sets* de Valentine (1964) dont il reprend la preuve (qui repose en fait sur l'idée des travaux de Bunt, pas de ceux de Motzkin en dimension deux !). Je présente ici trois preuves dont deux sont *peut-être* originales, mais c'est peu probable vu que la littérature est vaste. Je remercie Jean D'Almeida et Hervé Queffélec pour avoir attiré mon attention sur ce résultat (que j'ignorais alors totalement !) en 2009, époque à laquelle remonte la preuve via Cauchy-Peano-Arzelà présentée plus loin. Le problème analogue dans l'espace de Hilbert réel de dimension infinie est non résolu. Voir entre autres le livre de Frank Deutsch *Best Approximation in Inner Product Spaces* CMS Books in Mathematics / Ouvrages de mathématiques de la SMC. Springer, New York, NY (2001).

v2 : Je remercie Étienne Matheron qui m'a communiqué la méthode utilisant le théorème du point fixe de Brouwer. On trouve également cette méthode dans le livre cité de F. Deutsch, et elle fonctionne même en dimension infinie, mais avec des hypothèses restrictives sur l'ensemble C, via l'extension par Schauder du théorème de Brouwer à ce contexte. F. Deutsch semble penser que l'énoncé sans autres hypothèses est *faux* en dimension infinie, mais à l'heure actuelle il y a certes des contre-exemples dans un espace de dimension infinie muni d'un produit scalaire, mais pas dans l'espace de Hilbert.

Et j'ajoute encore une autre méthode, la plus élémentaire, que j'ai obtenue quelques temps après avoir rédigé la première version de ce texte.

C est fermé Sinon il existe $x \notin C$ et une suite (y_n) dans C avec $y_n \to x$. Donc $d_C(x) = 0$ cependant $d(x, y) > 0$ pour tout $y \in C$. Contradiction avec (2).

d_C **est continue sur** E On a $d_C(x_1) \leqslant d(x_1, z) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, z)$ pour tout $z \in C$. En prenant l'infimum on obtient $d_C(x_1) \leqslant d(x_1, x_2) + d_C(x_2)$. De même en échangeant x_1 et x_2 et finalement $|d_C(x_1) - d_C(x_2)| \leqslant d(x_1, x_2)$ et d_C est 1-Lipschitzienne.

$\pi : E \to C$ **est continue** Supposons le contraire. Il existe donc $x \in E$, $\epsilon > 0$, et une suite (x_n) de limite x tels que $d(\pi(x_n), \pi(x)) > \epsilon$ pour tout n. Posons $z_0 = \pi(x)$. Comme $d(x_n, \pi(x_n)) \leqslant d(x_n, z_0)$ (par définition de $\pi(x_n)$), et que (x_n) est une suite bornée dans E, la suite $d(x_n, \pi(x_n))$ est bornée, et par conséquent la suite $(\pi(x_n))$ dans C est bornée. Quitte à passer à une sous-suite ($C \cap \{x, d(0, x) \leqslant R\}$ est un compact) on peut la supposer convergente. Soit $z_1 \in C$ sa limite. À nouveau $d(x_n, \pi(x_n)) \leqslant d(x_n, z_0)$ puis en passant à la limite $d(x, z_1) \leqslant d(x, z_0)$. Donc par (2), $z_1 = z_0$. Or $d(\pi(x_n), \pi(x)) > \epsilon$ donne à la limite $d(z_1, z_0) \geqslant \epsilon > 0$.

d_C **est de classe** C^1 **sur** $E \setminus C$ Notons $f = d_C^2$. Soit $P \in E$ et $A = \pi(P) \in C$. Soit Q et $\pi(Q) = B$. On va majorer et minorer $f(Q)$, pour Q tendant vers P (et donc B vers A) :

$$\begin{aligned}
f(Q) &= \|\overrightarrow{QB}\|^2 \leqslant \|\overrightarrow{QA}\|^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 + 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PA} + f(P) \\
f(Q) &= \|\overrightarrow{QB}\|^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 + 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PB} + \|\overrightarrow{PB}\|^2 \\
&\qquad\qquad\quad \geqslant \|\overrightarrow{QP}\|^2 + 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{AB} + \|\overrightarrow{PA}\|^2 \\
&\qquad\qquad\quad \geqslant \|\overrightarrow{QP}\|^2 + 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PA} - 2\|\overrightarrow{QP}\|\,\|\overrightarrow{AB}\| + f(P)
\end{aligned}$$

D'où l'encadrement

$$\|\overrightarrow{PQ}\| - 2\|\overrightarrow{AB}\| \leqslant \frac{f(Q) - f(P) - 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \leqslant \|\overrightarrow{PQ}\|$$

et comme $\|\overrightarrow{AB}\|$ tend vers zéro pour Q tendant vers P, la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est différentiable au point P, avec différentielle $\vec{v} \mapsto 2\overrightarrow{\pi(P)P} \cdot \vec{v}$. Il en résulte que $d_C = \sqrt{f}$ est différentiable sur $E \setminus C$ avec différentielle $\vec{v} \mapsto \vec{u}(P) \cdot \vec{v}$, $\vec{u}(P)$ étant le vecteur unitaire $\overrightarrow{\pi(P)P}/\|\overrightarrow{\pi(P)P}\|$. Par continuité de π on peut même dire que d_C est C^1 sur $E \setminus C$.

Conclusion par le calcul différentiel (extrema liés) Soit $P_0 \notin C$, et $A_0 = \pi(P_0)$ son projeté. On note $t_0 = d_C(P_0) = \|\overrightarrow{A_0P_0}\|$. Pour tout point P du segment $[A_0, P_0]$ et $B \in C$ on a $d(P, B) \geqslant d(P_0, B) - d(P_0, P) \geqslant d(P_0, A_0) - d(P_0, P) = d(P, A_0)$ donc $\pi(P) = A_0$. L'objectif est de montrer qu'on peut prolonger le segment $[A_0, P_0]$ au-delà de P_0 et conserver cette propriété. En fait cette tactique est commune aux trois méthodes que nous proposons, donc celle-ci est la première.

La boule fermée de centre P_0 et de rayon $\frac{1}{2}t_0$ est dans le complémentaire de C. Considérons un point P dans cette boule fermée en lequel la fonction continue d_C atteint le maximum (de la restriction à la boule). Ce point P ne peut pas être un point intérieur car d_C est différentiable en P et son gradient est un vecteur non nul (unitaire, même). Donc ce point est sur la sphère de centre P_0 et de rayon $\frac{1}{2}t_0$. Par le théorème des extremas liés, la différentielle de d_C au point P est (comme forme linéaire) proportionnelle à la différentielle de la fonction $Q \mapsto d(P_0, Q)$ au point P. Mais cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\pi(P)P}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ sont liés, autrement dit que P, P_0 et $\pi(P)$ sont alignés. De plus $\pi(P) \in C$ ne peut pas être sur le segment $[P_0, P]$. Il est impossible que P soit entre P_0 et $\pi(P)$ car si c'était le cas les points Q proches de P sur le rayon P_0P, à l'intérieur de la boule, donneraient à d_C des valeurs plus grandes qu'en P (car le gradient de d_C au point P est le vecteur unitaire orienté de $\pi(P)$ vers P, donc de P vers P_0 ici). Donc c'est P_0 qui est sur le segment allant de $\pi(P)$ à P. Mais alors (astuce !) on sait que $A_0 = \pi(P_0) = \pi(P)$. Donc P est le point $A_0 + \frac{3}{2}\overrightarrow{A_0P_0}$.

On a obtenu notre objectif et par une récurrence facile et le fait que $(3/2)^n \to \infty$ on obtient que la demi-droite partant de A_0 et passant par P_0 est entièrement (à part son point de départ) dans le complémentaire de C et que tous les points de cette demi-droite ont le même projeté A_0.

L'ensemble C est ainsi dans le complémentaire de toutes les boules ouvertes de rayons h centrées en les $A_0 + h\vec{u}(P_0)$, $0 < h < \infty$, donc dans l'hyperplan fermé $\{B, \vec{u}(P_0) \cdot \overrightarrow{A_0B} \leqslant 0\}$. Le point P_0 n'est pas dans cet hyperplan donc ne peut pas être le barycentre de points de C, et comme il est quelconque dans le complémentaire, C est convexe.

Conclusion par courbes intégrales et théorème de Cauchy-Peano-Arzelà Il s'agit en fait de la méthode que j'avais publiée dans la première version de cette note. On conserve les notations : on a donc un $P_0 \notin C$, son projeté $A_0 = \pi(P_0)$, et on pose $t_0 = d_C(P_0) = \|\overrightarrow{A_0P_0}\|$. Pour tout point P du segment $[A_0, P_0]$ on sait que $\pi(P) = A_0$. L'objectif est à nouveau de montrer qu'on peut prolonger un peu le segment $[A_0, P_0]$ au-delà de P_0 et conserver cette propriété.

Le Théorème de Cauchy-Peano-Arzelà
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cauchy-Peano-Arzel%C3%A0`
permet d'affirmer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une fonction $P \in C^1([t_0, t_0 + \epsilon], E \setminus C)$ telle que $P(t_0) = P_0$ et $P'(t) = \vec{u}(P(t))$ pour tout t. (Pour le champ de vecteurs $\vec{u}$, voir la section précédente ; sa continuité suffit pour Cauchy-Peano-Arzelà [1]). Par calcul de la différentielle d'une composée et Cauchy-Schwarz $\left|\frac{d}{dt}d(P_0, P(t))\right| \leqslant 1$ pour $t_0 < t \leqslant t_0 + \epsilon$ donc $d(P_0, P(t)) \leqslant t - t_0$ et $d(A_0, P(t)) \leqslant t$. Par ailleurs d_C est C^1 et $\frac{d}{dt}d_C(P(t)) = \vec{u}(P(t)) \cdot P'(t) = 1$ donc $d_C(P(t)) = t$ (puisque c'est vrai pour $t = t_0$). Comme $d(A_0, P(t)) \leqslant t$, il en résulte $\pi(P(t)) = A_0$ et $d(A_0, P(t)) = t$. Mais $d(P_0, P(t)) \leqslant t - t_0$, donc le seul possible est $P(t) = A_0 + t\vec{u}(P_0)$. On a ce qu'on voulait.

Soit maintenant H le supremum des $h \geqslant 0$ tels que π est la fonction constante A_0 sur $\{A_0 + t\vec{u}(P_0), 0 \leqslant t \leqslant h\}$. Si $H < \infty$, alors par continuité de π, $\pi(A_0 + H\vec{u}(P_0)) = A_0$

1. $D(P_0, t_0) \cap C = \emptyset$ et $\forall P\ \|\vec{u}(P)\| = 1$, donc tout $\epsilon < t_0$ conviendrait mais nous n'en avons pas besoin.

et la paragraphe précédent contredit que H est le supremum. Donc $\mathrm{H} = \infty$. On conclut comme dans la méthode précédente.

Conclusion par emploi du théorème de Brouwer À nouveau on a un $\mathrm{P}_0 \notin \mathrm{C}$, son projeté $\mathrm{A}_0 = \pi(\mathrm{P}_0)$, et on pose $t_0 = d_{\mathrm{C}}(\mathrm{P}_0) = \|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{P}_0}\|$. Pour tout point P du segment $[\mathrm{A}_0, \mathrm{P}_0]$ on sait que $\pi(\mathrm{P}) = \mathrm{A}_0$.

Soit $\mathcal{B}$ la boule fermée de centre P_0 et de rayon $\frac{1}{2}t_0$. On va construire une fonction continue $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. On pose :

$$f(\mathrm{P}) = \pi(\mathrm{P}) + \big(\|\overrightarrow{\pi(\mathrm{P})\mathrm{P}_0}\| + \frac{1}{2}t_0\big)\frac{\overrightarrow{\pi(\mathrm{P})\mathrm{P}_0}}{\|\overrightarrow{\pi(\mathrm{P})\mathrm{P}_0}\|} = \mathrm{P}_0 + \frac{t_0}{2}\frac{\overrightarrow{\pi(\mathrm{P})\mathrm{P}_0}}{\|\overrightarrow{\pi(\mathrm{P})\mathrm{P}_0}\|}$$

On remarque que f envoie $\mathcal{B}$ sur la sphère qui est son bord.

La fonction $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est continue et donc, par le théorème de Brouwer, admet un point fixe P. Ce point P est sur la sphère. Par construction P_0 est sur le segment allant de $\pi(\mathrm{P})$ à P. Par l'astuce vue dans la première preuve, cela impose qu'en fait $\pi(\mathrm{P}) = \pi(\mathrm{P}_0)$ et donc on conclut que P est le point à distance $\frac{3}{2}t_0$ de $\mathrm{A}_0 = \pi(\mathrm{P}_0)$ sur la demi-droite passant par P_0.

On termine alors comme dans la première preuve. On notera que cette approche a utilisé uniquement la continuité de l'application d_{C}, et pas sa différentiabilité.