

Attention! Nos amis outre-Rhin utilisent la lettre e pour désigner $\sqrt{a^2 - b^2}$ et ε pour désigner l'excentricité $\sqrt{1 - (b/a)^2}$ alors qu'en France l'excentricité est toujours notée e comme dans la légende ci-dessus. Nous utiliserons les notations françaises dans ce texte.

Notons $d_1 = d(M, F_1)$ et $d_2 = d(M, F_2)$. On calcule $d_1^2 - d_2^2$ de deux façons:

$$d_1^2 - d_2^2 = (x - c)^2 + y^2 - (x + c)^2 - y^2 = -4cx \quad (1)$$

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) \quad (2)$$

Il en résulte, d'une manière générale:

$$d_1 - d_2 = -\frac{4c}{d_1 + d_2}x \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{d_1 + d_2 + (d_1 - d_2)}{2} = \frac{2}{(d_1 + d_2)} \left(\left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 - cx \right) \quad (4)$$

$$d_2 = \frac{d_1 + d_2 - (d_1 - d_2)}{2} = \frac{2}{(d_1 + d_2)} \left(\left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 + cx \right) \quad (5)$$

L'équation $d_1 + d_2 = 2a$ implique donc le système

$$d_1 = a - ex, \quad (6)$$

$$d_2 = a + ex. \quad (7)$$

La réciproque est immédiate. Mais nous allons voir que la seule équation (6) suffit. En effet on peut mettre (4) sous la forme

$$P\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right) = 0 \text{ avec } P = X^2 - d_1 X - cx \quad (8)$$

En fait on a simplement par (1):

$$P = \left(X - \frac{d_1 + d_2}{2}\right) \left(X - \frac{d_1 - d_2}{2}\right) \quad (9)$$

Or l'équation (6) dit que $a^2 - d_1 a - cx = a(a - d_1 - ex) = 0$, autrement dit que $P(a) = 0$.¹ Mais $\frac{d_1 - d_2}{2} = a$ est impossible. En effet $d_1 \leq d_2 + 2c$ par l'inégalité triangulaire, et ainsi $\frac{d_1 - d_2}{2} \leq c < a$. Donc l'équation (6) a comme corollaire $a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ (et par suite aussi (7)).

Théorème 1. Pour tout $0 \leq c < a$ l'équation $d_1 + d_2 = 2a$ équivaut à l'équation $d_1 = a - ex$.

On a utilisé les notations $d_i = d(M, F_i)$, $M = (x, y)$, $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$.

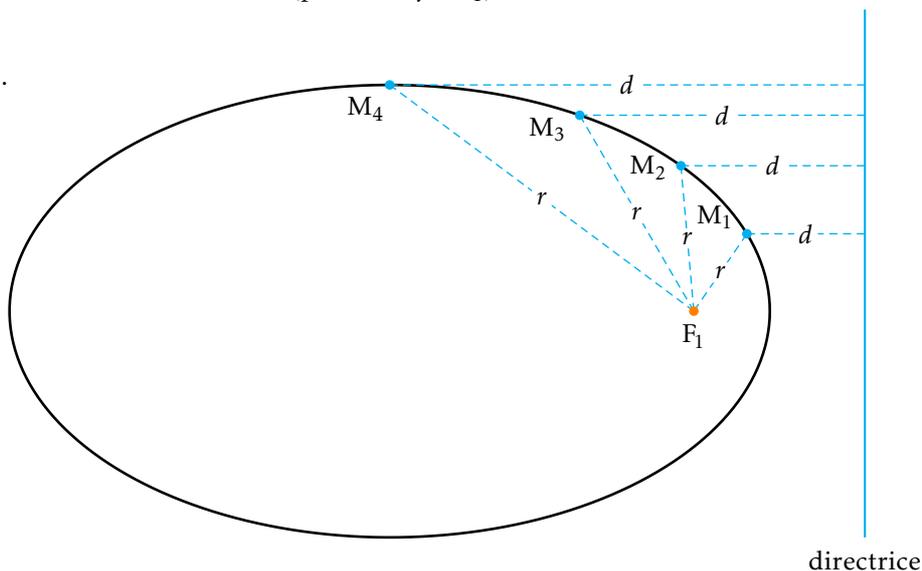
Si l'ellipse n'est pas un cercle ($e > 0$), posons $f = e^{-1}a$. L'équation (6) dit que $d(M, F_1) = e \cdot (f - x)$: autrement dit la distance de M au point F_1 est e fois la distance de M à la droite \mathcal{D} perpendiculaire à l'axe focal $F_1 F_2$ et passant par le point d'abscisse f . En effet si $x \geq f$, l'équation $d(M, F_1) = e(x - f)$ est impossible car $d(M, F_1) > x - f$, le point F_1 étant dans l'autre demi-plan.

1. L'équation (6) a précisément été obtenue à partir de (4) par la substitution $a = (d_1 + d_2)/2$.

Donc il ne peut y avoir $d(M, F_1) = ed(M, D)$ que pour $x < f$ et l'équation devient $d_1 = e(f - x)$, qui est (6).

Cette droite D est appelée droite « directrice » (pour le foyer F_1).

$r = ed$. Avec ici $e = 0,8$.



Nous obtenons de (6) le moyen d'obtenir une équation algébrique pour \mathcal{E} en les coordonnées cartésiennes (x, y) . Les équations suivantes sont équivalentes :

$$d_1 = a - ex \iff (x - c)^2 + y^2 = (a - ex)^2 \quad \text{et} \quad x \leq f \quad (10)$$

$$\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2 \quad \text{et} \quad x \leq f \quad (11)$$

$$\iff (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{et} \quad x \leq f \quad (12)$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad x \leq f \quad (13)$$

$$\iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (14)$$

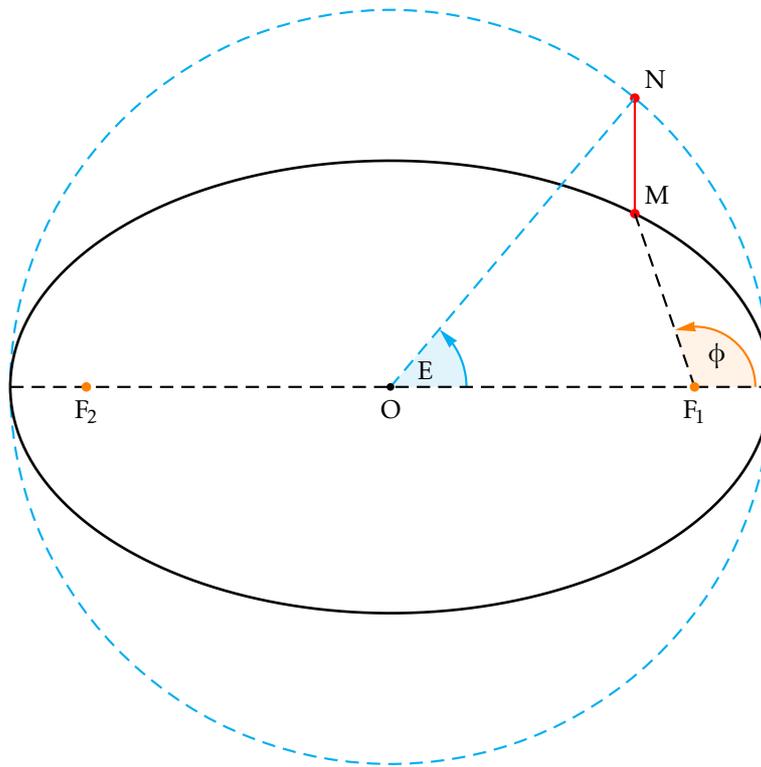
$$\iff \exists E \quad (x, y) = (a \cos E, b \sin E) \quad (15)$$

$$\iff M = (x, y) = T(N) \quad \text{pour} \quad N \in \mathcal{C} \quad (16)$$

avec T la transformation affine $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$

Rappelons que \mathcal{C} désigne le cercle de centre O et de rayon a .

Elle joue aussi un rôle important par la suite. Voici une figure illustrant la relation entre le point M sur l'ellipse et le point N sur le cercle, et l'angle E au centre de l'ellipse. On y fait figurer aussi l'angle ϕ des coordonnées polaires centrées au foyer F_1 . La relation entre ϕ et E fera l'objet de commentaires détaillés ultérieurement.



C'est seulement maintenant, grâce à la paramétrisation $(a \cos E, b \sin E)$ (ou $\mathcal{E} = T(\mathcal{C})$) que nous pouvons nous convaincre rigoureusement que les ellipses ressemblent à ce qui est illustré dans nos figures!

2 « Des aires égales sont balayées dans des temps égaux »

C'est la seconde loi de Kepler sur le mouvement des astres autour du Soleil. Elle ne vaut exactement que pour des systèmes à deux corps, et attention le foyer est au barycentre de masse des deux corps; donc le cas du système Soleil-Terre, la masse solaire vaut environ 333 060,402 fois celle de la Terre, et l'ellipse théorique (en négligeant tout le reste du contenu de l'univers... et en restant dans le cadre Newtonien) parcourue par la Terre a son foyer très proche du centre du Soleil (le-dit centre n'étant pas quelque chose sans doute de très précis non plus, mais bref, lorsque l'Homme croit penser l'Univers, il fait quelques approximations).

Il nous faut donc trouver un moyen de calculer l'aire balayée par le rayon \overrightarrow{SM} (S est le Soleil, $S = F_1$) lorsque M va de M_1 en M_2 . La formule théorique

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 d\phi \tag{17}$$

semble nous inviter à

1. trouver l'équation de \mathcal{E} en coordonnées polaires, avec centre en $F_1 = S$, sous la forme $r = r(\phi)$,
2. intégrer (17) exactement ou numériquement.

Cela semble naturel, mais il se trouve que les calculs faisant intervenir l'angle E de la paramétrisation circulaire sont beaucoup plus simples.

Théorème 2. L'aire algébrique totale balayée par le rayon vecteur \overrightarrow{SM} pour M allant (continûment) du sommet A au point $P = (a \cos E, b \sin E)$ est (pour tout $E \in \mathbb{R}$):

$$\mathcal{A} = \frac{ab}{2}(E - e \sin E) \quad (18)$$

Dans le vocabulaire de l'astronomie classique, l'angle ϕ est appelé « anomalie vraie » tandis que l'angle E est appelé « anomalie excentrique ».

Démonstration. L'aire recherchée est b/a fois celle balayée par les rayons \overrightarrow{SN} allant du foyer $S = F_1$ vers le point mobile N sur le cercle de centre O de rayon a , N se déplaçant de $(a, 0)$ vers $(a \cos E, a \sin E)$. Donc (et ici le produit $\vec{u} \times \vec{v}$ est le déterminant, mais ceux qui préfèrent peuvent ajouter un vecteur perpendiculaire au plan Oxy):

$$d\mathcal{A} = \frac{b}{a} \frac{1}{2} \overrightarrow{F_1 N} \times d\overrightarrow{N} \quad (19)$$

$$= \frac{b}{a} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a \cos E - c & -a \sin E dE \\ a \sin E & a \cos E dE \end{vmatrix} = \frac{b}{a} \frac{1}{2} (a^2 - ac \cos E) dE = \frac{ab}{2} (1 - e \cos E) dE \quad (20)$$

et donc (18). □

Soit T la période de révolution. Pour que le corps céleste passe d'une position M_1 à une position M_2 en une fraction uT de T il est donc nécessaire et suffisant que la variable E passe de E_1 à E_2 avec $E - e \sin E$ variant de $u2\pi$.

Nous exprimerons plutôt les angles E en degrés. Dans cette nouvelle unité, la quantité à étudier est $E - e \frac{180}{\pi} \text{sind}(E)$ et la formule à résoudre pour des illustrations numériques est

$$E_2 - e \frac{180}{\pi} \text{sind}(E_2) = E_1 - e \frac{180}{\pi} \text{sind}(E_1) + 360u \quad (21)$$

avec $M_1 = (a \cos d(E_1), b \text{sind}(E_1))$, $M_2 = (a \cos d(E_2), b \text{sind}(E_2))$.

Il nous faut donc l'inverse de la fonction $E \mapsto g(E) = E - e \frac{180}{\pi} \text{sind}(E)$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Sa dérivée $g'(E) = 1 - e \cos d(E)$ est strictement positive donc $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme. Il vérifie bien sûr $g(E + 360) = E + 360$, et $g(-E) = -g(E)$.

Nous utilisons l'algorithme de NEWTON pour calculer $g^{-1}(\alpha)$. Nous prenons comme valeur initiale $E = \alpha$ et nous arrêtons le calcul lorsque la dernière modification est inférieure en valeur absolue à 10^{-6} . Le critère d'arrêt a été choisi de manière à pouvoir légitimement penser que l'algorithme s'arrête avec une valeur finale ayant plus de dix chiffres exacts après la virgule (modulo les reports de retenue d'arrondi).

Voici par exemple avec $e = 0,8$ les étapes du calcul de l'angle E (en degrés) tel que $E - e \sin(E) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. On passe de chaque ligne à la suivante par la formule de NEWTON $x - (g(x) - 30)/g'(x)$ qui permet de résoudre approximativement $g(x) = 30$ par itération :

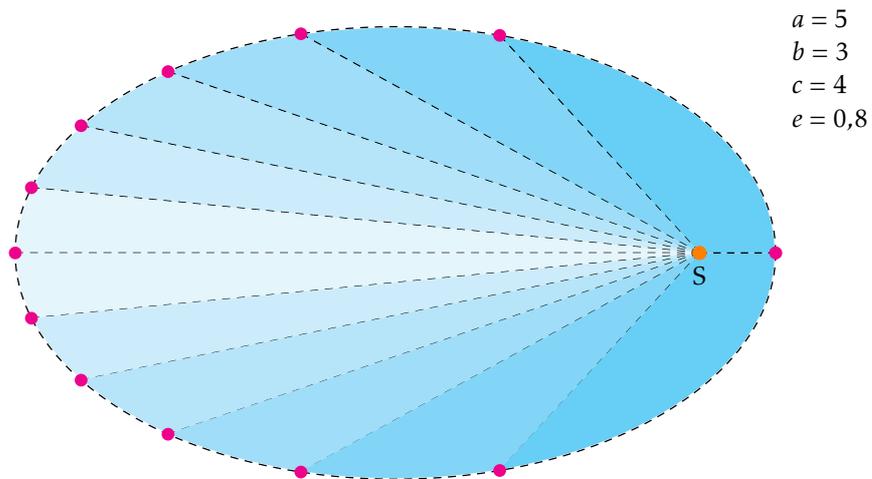
Étape	Valeur
0	30,000 000 000 00°
1	104,608 815 371 89°
2	79,434 317 036 58°
3	74,307 413 876 24°
4	74,078 642 005 53°
5	74,078 191 516 49°
6	74,078 191 514 74°

Toujours avec $e = 0,8$, voici une table de valeurs illustrant plus généralement le résultat du procédé pour les angles multiples de trente degrés :

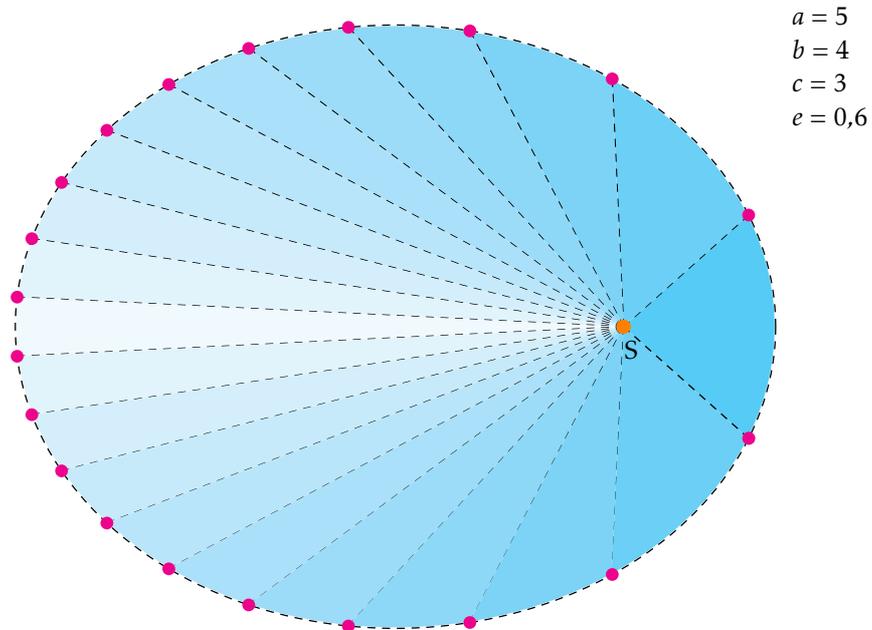
Dans la table qui suit, la représentation interne en virgule flottante et les calculs avec E utilisent des mantisses de 16 chiffres significatifs. On n'en affiche que 11 après la virgule dans la première colonne (avec arrondi). La seconde colonne est arrondie à des mantisses de 14 chiffres et on constate qu'à cette précision le résultat du calcul de l'aire correspondant à E (ou plutôt de la fraction de l'aire pour une révolution, et représentée comme un angle en degrés, l'aire par révolution complète πab étant rapportée à 360°) donne exactement la valeur désirée, donc le critère d'arrêt utilisé pour l'algorithme de NEWTON était bien choisi.

E	$E - e \frac{180}{\pi} \text{sind}(E)$
-126,734 288 506 36°	-90°
-104,397 148 957 48°	-60°
-74,078 191 514 74°	-30°
0°	0°
74,078 191 514 74°	30°
104,397 148 957 48°	60°
126,734 288 506 36°	90°
145,778 336 412 36°	120°
163,227 318 305 62°	150°
180,000 000 000 00°	180°
196,772 681 694 38°	210°
214,221 663 587 64°	240°
233,265 711 493 64°	270°
255,602 851 042 52°	300°
285,921 808 485 26°	330°
360,000 000 000 00°	360°
434,078 191 514 74°	390°
464,397 148 957 48°	420°
486,734 288 506 36°	450°

En voici une représentation graphique :



Voici maintenant avec $e = 0,6$ et des incréments de 5% de la période de révolution :



3 Ellipse et aire elliptique via les coordonnées polaires, où comment découvrir l'anomalie excentrique même en s'acharnant à vouloir tout faire avec l'anomalie vraie

Si nous utilisons des coordonnées polaires centrées en le foyer F_1 , alors tout bêtement $d_1 = r$ et $x = c + r \cos \phi$. Or l'équation (6) (caractérisation de l'ellipse par foyer et directrice) est $d_1 = a - ex$,

qui équivaut à $r = a - ec - er \cos \phi$ ou encore à $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos \phi)$ et nous obtenons :

Théorème 3. *L'ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité e a comme équation polaire, avec le centre des coordonnées en un foyer F et $\phi \equiv \pi \pmod{2\pi}$ pour l'autre foyer F' :*

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (22)$$

avec $p = a(1 - e^2)$. Ce cas de figure correspond au périhélie ayant argument nul.

Lorsque le centre des coordonnées est en F avec l'autre foyer ayant argument $\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$, l'équation est

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \phi} \quad (23)$$

Ce cas de figure correspond à l'apogée ayant argument nul.

Démonstration. Nous avons obtenu la formule avec centre radial en F_1 . Si on le place en F_2 , notons ψ la détermination angulaire pour éviter les confusions, alors $r = d_2 = a + ex = a + e(-c + r \cos \psi)$ d'où le résultat.

On peut aussi utiliser la symétrie dans l'axe $0y$. L'image par cette symétrie du point M de coordonnées polaires $(r; \phi)_{F_1}$ est celui de coordonnées polaires $(r; \psi = \pi - \phi)_{F_2}$. \square

Nous reviendrons plus loin sur la relation entre ϕ et ψ .

Ainsi l'aire $\mathcal{A}(\phi_1, \phi_2)$ balayée par le rayon vecteur lorsque la coordonnée angulaire (avec centre en F_1) $\phi \in \mathbb{R}$ varie de ϕ_1 à ϕ_2 est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 d\phi = \frac{p^2}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (24)$$

On sait ramener ce genre d'intégrale à celui de fractions rationnelles par le changement de variables $u = \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$. Mais attention, ici nous imposons donc $-\pi < \phi_1, \phi_2 < +\pi$. Faisons le calcul :

$$\int^{\phi} \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2} = \int^u \left(\frac{1}{1 + e \frac{1-u^2}{1+u^2}} \right)^2 \frac{2du}{1+u^2} = 2 \int^u \frac{(1+u^2)}{((1+u^2) + e(1-u^2))^2} du \quad (25)$$

$$= 2 \int^u \frac{(1+u^2)}{(1+e)^2 \left(1 + \frac{1-e}{1+e} u^2\right)^2} du \quad (26)$$

$$= \frac{2}{(1+e)^2} \int^u \frac{\frac{1+e}{1-e} \left(1 + \frac{1-e}{1+e} u^2\right) + \frac{-2e}{1-e}}{\left(1 + \frac{1-e}{1+e} u^2\right)^2} du \quad (27)$$

Clairement on a intérêt à poser $u = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} v$, puis on continue :

$$= \frac{2}{(1+e)^2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{1-e} \left((1+e) \int^v \frac{dv}{1+v^2} - 2e \int^v \frac{dv}{(1+v^2)^2} \right) \quad (28)$$

$$= 2(1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left((1+e) \operatorname{Arctg} v - 2e \int^v \frac{1}{(1+v^2)^2} dv \right) \quad (29)$$

Cette dernière primitive est un classique... mais on peut surprendre plus d'un étudiant avec elle! On la retrouve en intégrant par parties $dv/(1+v^2)$:

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{v}{1+v^2} + 2 \int \frac{v^2}{(1+v^2)^2} dv \quad (30)$$

$$= \frac{v}{1+v^2} + 2 \left(\int \frac{1}{1+v^2} dv - \int \frac{1}{(1+v^2)^2} dv \right) \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{(1+v^2)^2} dv = \frac{v}{2(1+v^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{v}{2(1+v^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} v \quad (32)$$

Si l'on reprend tous ces éléments on obtient, pour $-\pi < \phi < \pi$:

$$\mathcal{A}(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^\phi r^2 d\phi = \frac{p^2}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1+e \cos \phi)^2} \quad (33)$$

$$= \frac{p^2}{2} 2(1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\operatorname{Arctg} v - e \frac{v}{1+v^2} \right) \quad (34)$$

$$= a^2 \sqrt{1-e^2} \left(\operatorname{Arctg} v - e \frac{v}{1+v^2} \right) \quad (35)$$

$$= ab \left(\operatorname{Arctg} v - e \frac{v}{1+v^2} \right) \quad \text{avec } -\pi < \phi < \pi, \quad v = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \quad (36)$$

Il est naturel d'introduire à ce stade un angle $\lambda \in]-\pi, \pi[$ défini par

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = v \quad (37)$$

Et la formule devient

$$\mathcal{A}(\phi) = \frac{ab}{2} (\lambda - e \sin(\lambda)) \quad (38)$$

Il faut donc avoir fait une fois dans sa vie ce calcul brutal de $\frac{1}{2} \int_0^\phi r^2 d\phi$, qui amène à introduire un angle λ par la relation (37).

Par un cheminement nettement plus simple nous savions déjà que $\mathcal{A} = \frac{ab}{2} (E - e \sin E)$, et ce même pour $E \in \mathbb{R}$! On a déjà commenté que $\alpha \mapsto \alpha - e \sin(\alpha)$ est uniquement inversible donc $\boxed{\lambda = E}$ pour $-\pi < E < \pi$, et nous obtenons par cette voie indirecte la relation:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}, \quad (39)$$

qui reste valable sur \mathbb{R} puisque $E(\phi + 2\pi) = E(\phi) + 2\pi$.

4 Équations reliant E et ϕ

On a

$$a \cos E = c + r \cos \phi \quad (40)$$

$$b \sin E = r \sin \phi \quad (41)$$

et (6) à nouveau donne $r = d_1 = a - ex = a(1 - e \cos E)$ d'où

$$r = a(1 - e \cos E) \quad \text{et on sait déjà que } r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \phi} \quad (42)$$

Ce qui en éliminant r donne:

$$(1 - e \cos E)(1 + e \cos \phi) = 1 - e^2 \quad (43)$$

Aussi, $\cos \phi = (a \cos E - c)/r$ et en exprimant r à partir de $\cos E$:

$$\cos \phi = \frac{a \cos E - c}{a - c \cos E} \quad (44)$$

Comme la matrice hyperbolique $\begin{pmatrix} a/b & -c/b \\ -c/b & a/b \end{pmatrix}$ s'inverse en renversant le signe de c , ou en reprenant depuis le début, on a aussi:

$$\cos E = \frac{a \cos \phi + c}{a + c \cos \phi} \quad (45)$$

Cela semble difficile à voir d'emblée a priori mais les relations mutuellement équivalentes ci-dessus sont aussi équivalentes à:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} \quad (46)$$

Nous devons prendre le signe + pour la racine carrée parce que $0 < \phi < \pi \iff 0 < E < \pi$, cf. (41). La relation reste alors valable pour la détermination $E(\phi)$ continue telle que $E(0) = 0$ parce que $E(\phi + 2\pi) = E(\phi) + 2\pi$. On retrouve ainsi (39).

On donnera plus tard un argument presque sans calculs pour (46) mais revenons brièvement à (43). Si on a l'idée de poser $\cos E = \frac{1-T}{1+T}$ et $\cos \phi = \frac{1-U}{1+U}$, elle devient

$$(1 + T - e(1 - T))(1 + U + e(1 - U)) = (1 - e^2)(1 + T)(1 + U) \quad (47)$$

$$\iff (1 - e + (1 + e)T)(1 + e + (1 - e)U) = (1 - e^2)(1 + T)(1 + U) \quad (48)$$

$$\iff (1 - e^2) + (1 + e)^2 T + (1 - e)^2 U + (1 - e^2) T U = (1 - e^2)(1 + T + U + T U) \quad (49)$$

$$\iff 2e(1 + e)T - 2e(1 - e)U = 0 \quad (50)$$

$$\iff T = \frac{1 - e}{1 + e} U, \quad (51)$$

d'où (46).

On peut aussi partir de l'homographie (44) reliant $\cos E$ et $\cos \phi$ et y insérer les $\operatorname{tg}(\cdot/2)$ pour découvrir miraculeusement (46).

On peut aussi expliquer avant de faire les calculs que la relation homographique entre $\cos E$ et $\cos \phi$ signifie qu'il y en a une entre $\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}$ et $\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}$ et que celle-ci doit préserver 0 et ∞ et donc est une homothétie!

Il ne reste plus qu'à déterminer le rapport homothétique en utilisant $E = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$.

En combinant $r = a(1 - e \cos E)$ avec (20) qui dit $dA = \frac{ab}{2}(1 - e \cos E)dE$ on obtient $dA = \frac{1}{2}br dE$. Comme par ailleurs $dA = \frac{1}{2}r^2 d\phi$,

$$bdE = rd\phi \quad (52)$$

et compte tenu de $b \sin E = r \sin \phi$ il vient :

$$\frac{dE}{\sin E} = \frac{d\phi}{\sin \phi} \quad (53)$$

Une primitive de $1/\sin(x)$ est $\log|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$, donc pour $0 < E < \pi$, qui équivaut à $0 < \phi < \pi$, on a

$$\log \operatorname{tg} \frac{E}{2} = K + \log \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \quad (54)$$

On fixe la constante en prenant $E = \frac{\pi}{2}$, donc $\phi = \pi - \operatorname{Arccos}(e) = \operatorname{Arccos}(-e)$. Ainsi $\cos \phi + 1 = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} = 1 - e$, $\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{(1 - e)/2}$, $-\cos \phi + 1 = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = 1 + e$, $\sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{(1 + e)/2}$, et finalement $K = -\frac{1}{2} \log \frac{1+e}{1-e}$ et

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \quad (55)$$

La relation a été montrée pour $0 < \phi < \pi$ mais elle reste valable par symétrie et prolongement pour tout $\phi \in \mathbb{R}$ et E sa détermination continue. Nous avons ainsi obtenu une troisième fois l'équation (39), et cette dernière approche est en fait la version infinitésimale de la première approche.

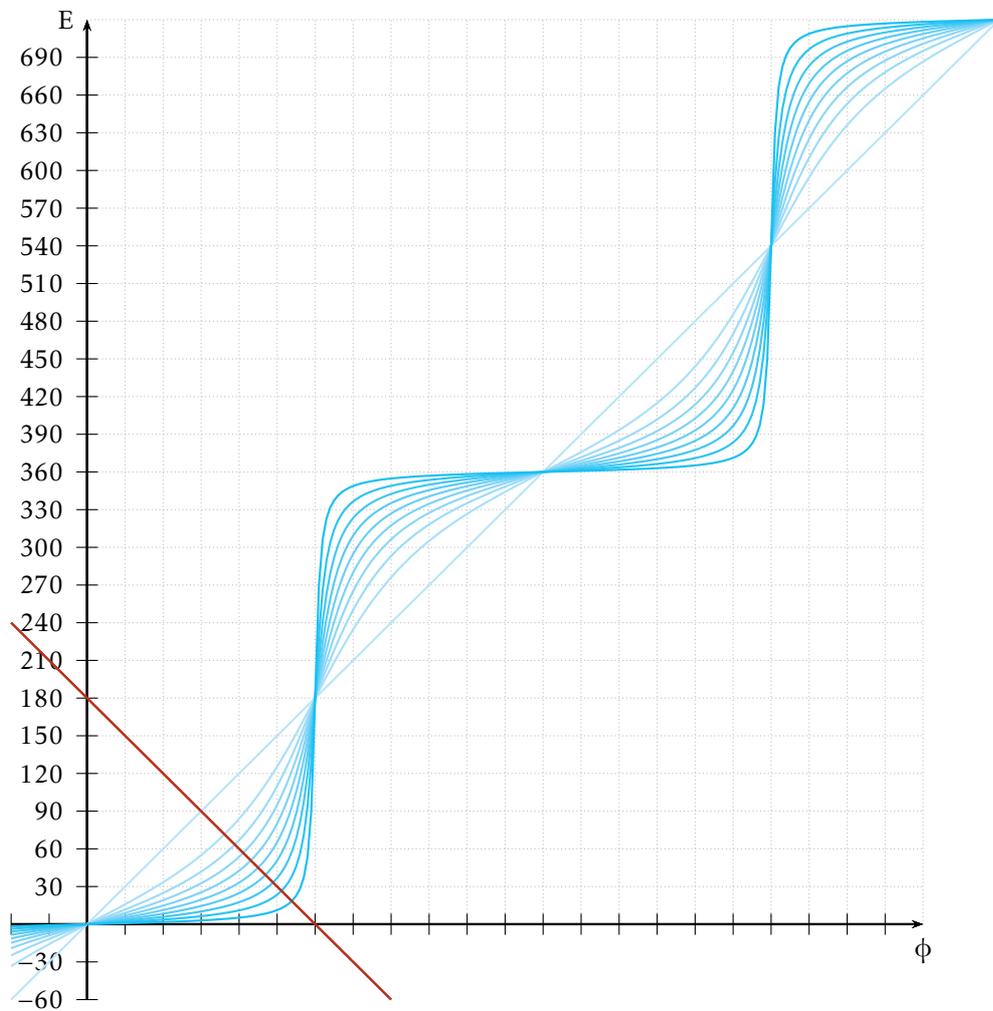
Faisons quelques commentaires supplémentaires :

- $E(\phi + 2\pi) = E(\phi) + 2\pi$. Clair géométriquement.
- $E(-\phi) = -E(\phi)$. Clair géométriquement.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, E(n\pi) = n\pi$. Clair géométriquement.
- Pour $0 < \phi < \pi$ on a $0 < E < \phi < \pi$. Clair par (39).
- Pour $-\pi < \phi < 0$ on a $-\pi < \phi < E < 0$. Idem.
- $E(2\pi - \phi) = 2\pi + E(-\phi) = 2\pi - E(\phi)$.
- ($e > 0$) La fonction $\phi \mapsto E(\phi) - \phi$ possède un unique minimum sur $[0, \pi]$. En effet nous savons que $\frac{dE}{d\phi} = r(\phi)/b$. La fonction $\phi \mapsto r(\phi)$ est strictement croissante sur l'intervalle considéré avec comme valeur initiale $a(1 - e) = b\sqrt{(1 - e)/(1 + e)} < b$ et comme valeur finale $a(1 + e) = b\sqrt{(1 + e)/(1 - e)} > b$. Il existe donc un ϕ_0 unique avec $r(\phi_0) = b$.

Dans la figure qui suit on a tracé des graphes de $E_e(\phi)$ pour des valeurs variables de l'excentricité e ; la moitié d'entre elles vérifiant $e > 0.9$ afin de visualiser des courbes « extrêmes ».

Si on ne l'avait pas encore devinée, une symétrie un peu cachée est clairement révélée par ces graphes :

Théorème 4. *Le graphe de E comme fonction de ϕ est symétrique par rapport à la droite $E + \phi = \pi$.*



Graphes de E en fonction de ϕ , pour différentes valeurs de l'excentricité, on a indiqué sur la figure l'axe de symétrie $E + \phi = \pi$.

Démonstration. En effet posons $E_1 = \pi - \phi$ et $\phi_1 = \pi - E$. Alors (les valeurs de tg et le domaine de Arctg étant la droite réelle complétée):

$$E = E(\phi) \iff \text{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg} \frac{\phi}{2} \quad (56)$$

et $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme avec $E(0) = 0$

$$\iff (\text{tg} \frac{\phi_1}{2})^{-1} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} (\text{tg} \frac{E_1}{2})^{-1} \quad (57)$$

et $\phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme comme fonction de E_1

et $\phi_1(0) = 0$

$$\iff \text{tg} \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg} \frac{\phi_1}{2} \quad (58)$$

et $E_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme comme fonction de ϕ_1

et $E_1(0) = 0$

$$\iff E_1 = E(\phi_1) \quad (!!)$$

Une façon relativement déstabilisante de formuler ce résultat est de dire que la fonction $\phi \mapsto \pi - E(\phi)$ est son propre inverse... \square

Comme cette symétrie laisse invariante la distance à la diagonale dans le plan (ϕ, E) , le point $(\phi_0, E_0 = E(\phi_0))$ uniquement caractérisé comme étant le plus éloigné de la diagonale dans le carré $[0, \pi] \times [0, \pi]$ est nécessairement invariant et ainsi $\phi_0 + E_0 = \pi$! Donc $\text{tg} \frac{\phi_0}{2} \text{tg} \frac{E_0}{2} = 1$ et on en déduit

$$\text{tg}^2 \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad \text{tg}^2 \frac{\phi_0}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (60)$$

Bien sûr on peut retrouver en partant de $r(\phi_0) = b$ qui permet de calculer $\cos \phi_0$ et/ou $\cos E_0$.

Théorème 5. Soit $\phi_0 \in [0, \pi]$ uniquement défini par $r(\phi_0) = b$. Soit $E_0 = E(\phi_0)$ et $K(e) = \phi_0 - E_0$. On a :

$$\max_{\mathbb{R}} |E(\phi) - \phi| = K(e) < \pi \quad (61)$$

et plus précisément $0 \geq E(\phi) - \phi \geq -K(e)$ pour $\phi \in [0, +\pi] + 2\pi\mathbb{Z}$ et $0 \leq E(\phi) - \phi \leq +K(e)$ si $\phi \in [-\pi, 0] + 2\pi\mathbb{Z}$.

La formule suivante est valable :

$$K(e) = \pi - 4\text{Arctg}\left(\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \pi - 2^{\frac{7}{4}}(1-e)^{\frac{1}{4}} + o_{e \rightarrow 1^-}((1-e)^{\frac{1}{4}}). \quad (62)$$

On a aussi

$$K(e) = 2\text{Arcsin} \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}} = 2\text{Arctg} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{4}} \right) \quad (63)$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé est déjà justifiée par l'étude de $\phi \mapsto E(\phi) - \phi$ sur $[0, \pi]$ et les symétries de E comme fonction de ϕ .

On connaît $\operatorname{tg} \frac{E_0}{2}$ et on sait que $E_0 + \phi_0 = \pi$ donc $K(e) = \phi_0 - E_0 = \pi - 2E_0$ ce qui donne la première formule en Arctg, et le développement limité.

Par ailleurs $\phi_0 \in [0, \pi]$ est caractérisé par $1 + e \cos \phi_0 = p/b = \sqrt{1 - e^2}$ donc $\cos \phi_0 = -(1 - \sqrt{1 - e^2})/e$.

$K(e) = \phi_0 - E_0 = 2\phi_0 - \pi$ donc $\sin K(e)/2 = \sin(\phi_0 - \pi/2) = -\cos \phi_0$ d'où la formule en Arcsin. Finalement $\operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2}$ et $\operatorname{tg} \frac{E_0}{2}$ sont inverses donc $\operatorname{tg}(\phi_0/2 - E_0/2) = (\operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{E_0}{2})/2$ d'où la seconde formule en Arctg. \square

D'un point de vue numérique, même si e est très proche de 1 disons à 10^{-8} , la racine quatrième de $1 - e$ sera de l'ordre de 10^{-2} au moins et K sera tout de même loin de π au sens de la précision typique avec les flottants (environ 16 chiffres décimaux d'habitude). Dans une annexe nous revenons sur certains aspects numériques.

En regardant les graphes on se dit qu'il faudrait exprimer $(\phi - E)/2$ comme une fonction impaire 2π -périodique de $(\phi + E)/2$. Voici comment :

$$\frac{\sin \frac{\phi - E}{2}}{\sin \frac{\phi + E}{2}} = \frac{\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{E}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{E}{2}}{\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{E}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{E}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \operatorname{tg} \frac{E}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \operatorname{tg} \frac{E}{2}} = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{b-a+c}{b+a-c} \quad (64)$$

Et donc (en vérifiant qu'il n'y a pas de $k\pi$ à ajouter ou retrancher) :

Théorème 6. $\phi - E$ est la fonction de $\frac{\phi + E}{2}$ suivante :

$$\phi - E = 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{b-a+c}{b+a-c} \sin \frac{\phi + E}{2} \right) \quad (65)$$

On trouve ainsi $K(e) = 2 \operatorname{Arcsin} \frac{b-a+c}{b+a-c}$ qui est équivalent à l'une des formules données précédemment.

5 La relation entre $(O; E)$ et $(F_1; \phi)$ est symétrique

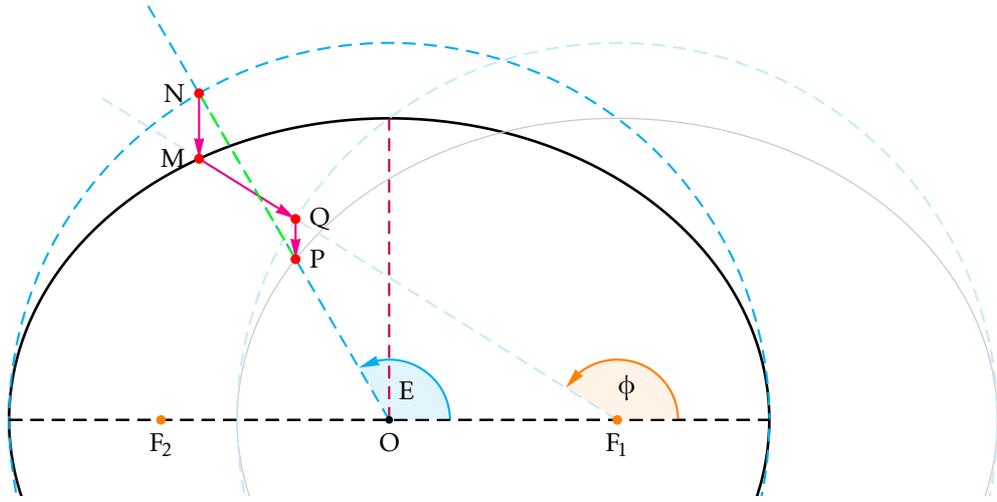
La figure qui suit explique que la même recette géométrique qui fait passer de l'angle E à l'angle ϕ permet de passer de l'angle ϕ à l'angle E en échangeant les rôles. Le foyer F_1 jouera le rôle de centre, tandis que O jouera le rôle de F_2 . Autrement dit on passe de ϕ à E par la même fonction mathématique qui ferait passer de E à l'angle ψ au second foyer F_2 .

Autrement dit, on a les formules symétriques (les remplacer par des identités de proportions créerait une ambiguïté de π si l'on considère par exemple que la première formule donne ϕ en fonction de E ou la seconde donne E en fonction de ϕ , et il faudrait lever cette ambiguïté en imposant par exemple que $\sin E$ et $\sin \phi$ ont le même signe) :

$$\exists \lambda > 0 \quad (\cos \phi, \sin \phi) = \lambda \cdot (a \cos E - c, b \sin E) \quad (66)$$

$$\exists \lambda' > 0 \quad (\cos E, \sin E) = \lambda' \cdot (a \cos \phi + c, b \sin \phi) \quad (67)$$

Démonstration. On connaît déjà la première identité car par définition des coordonnées polaires en F_1 $a \cos E = c + r \cos \phi$ et $b \sin E = r \sin \phi$.



- On utilise le repère Oxy . On note T la transformation affine $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$.
- 1 le point $N = (a \cos E, a \sin E)$
 - 2 le point $M = T(N) = (a \cos E, b \sin E)$ sur l'ellipse; il détermine l'angle ϕ au foyer F_1
 - 3 le point $Q = (c + a \cos \phi, a \sin \phi)$ sur la demi-droite F_1M , à distance a de F_1
 - 4 le point $P = T(Q) = (c + a \cos \phi, b \sin \phi)$
- Théorème 7:** Les points O, N, P sont alignés!
 Donc partant de ϕ , et *sans avoir à calculer le point M sur l'ellipse*, on a Q et on retrouve E comme la coordonnée angulaire de $P = T(Q)$.

Ainsi $a \cos E = r(cr^{-1} + \cos \phi)$ et l'on sait que $r^{-1} = p^{-1}(1 + e \cos \phi)$ donc $a \cos E = p^{-1}r(c + ae^2 \cos \phi + p \cos \phi) = p^{-1}r(c + a \cos \phi)$. Et $a \sin E = ab^{-1}r \sin \phi = p^{-1}r(ab^{-1}p \sin \phi)$ or $ab^{-1}p = b$, car $p = a(1 - e^2)$ et $ap = a^2 - c^2 = b^2$. Ce qui donne la deuxième identité. \square

Au passage on voit que $\lambda = r^{-1}$ et $\lambda' = (ap)^{-1}r = b^{-2}r$, ce qui donne la relation $OP \cdot F_1M = b^2$ avec les notations de la figure ($F_1M = r$). On peut aussi faire dans ce contexte le calcul

$$(a \cos E - c)^2 + b^2 \sin^2(E) = a^2 \cos^2 E - 2ac \cos E + c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 E \quad (68)$$

$$= a^2 - 2ac \cos E + c^2 \cos^2 E \quad (69)$$

$$= (a - c \cos E)^2 \quad (70)$$

et donc $r = a - c \cos E$, que nous avons vu souvent et qui dit que r est e fois la distance à la directrice. Le calcul analogue avec ϕ sera

$$(a \cos \phi + c)^2 + b^2 \sin^2(\phi) = a^2 \cos^2 \phi + 2ac \cos \phi + c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \phi \quad (71)$$

$$= a^2 + 2ac \cos \phi + c^2 \cos^2 \phi \quad (72)$$

$$= (a + c \cos \phi)^2 \quad (73)$$

et donc $OP = a + c \cos \phi$. Et de $F_1M \cdot OP = b^2$ on obtient

$$(a - c \cos E)(a + c \cos \phi) = b^2 \quad (74)$$

qui est à nouveau (43). Cette forme suggère fortement que la règle pour passer de ϕ à E est comme celle pour passer de E à ϕ mais en remplaçant c par $-c$, donc en faisant jouer à F_1 le rôle

de O mais à O le rôle de F_2 . L'équation à elle seule ne détermine pas $E(\phi)$ en dehors de $[0, \pi]$ mais si on la combine $E(-\phi) = -E(\phi)$ et à la périodicité oui.

Tout cela se voyait aussi sur la formule avec $\operatorname{tg} \frac{E}{2}$ puisque $(a-c)/b$ et $(a+c)/b$ sont inverses l'un de l'autre et égaux à $\sqrt{(1-e)/(1+e)}$ et $\sqrt{(1+e)/(1-e)}$.

Les formules $r = F_1 M = a - c \cos E$ et $OP = a + c \cos \phi$ se traduisent en les mesures algébriques suivantes :

$$\overline{QM} = -c \cos E \quad (75)$$

$$\overline{NP} = c \cos \phi \quad (76)$$

Les droites sont orientées de F_1 vers Q, et de O vers N respectivement.

6 Relation entre les coordonnées angulaires aux deux foyers

On sait que $d(M, F_1) = \frac{p}{1+e \cos \phi}$ avec ϕ la coordonnée angulaire avec centre en F_1 et que $d(M, F_2) = \frac{p}{1-e \cos \psi}$ avec ψ la coordonnée angulaire avec centre en F_2 . La somme valant $2a$ on obtient :

$$\frac{1}{1+e \cos \phi} + \frac{1}{1-e \cos \psi} = \frac{2}{1-e^2} = \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \quad (77)$$

compatible avec le fait que si $\phi = 0$ alors $\psi = 0$.

Mais comme pour E et ϕ cela signifie qu'on passe de $\cos \phi$ à $\cos \psi$ par une certaine transformation homographique, donc aussi de $\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}$ à $\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}$. Cette dernière transformation doit envoyer 0 sur 0 car $\phi = 0$ correspond à $\psi = 0$ et ∞ sur ∞ car $\phi = \pi$ correspond à $\psi = \pi$. Donc c'est une dilatation et on a une relation

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = v \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} \quad (78)$$

Considérons le point $(0, b)$. Pour lui $\psi = \pi - \phi$, et $\cos \psi = -\cos \phi = \cos(\pi - \phi) = c/a = e$, donc $\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} = (1 - \cos \phi)/(1 + \cos \phi) = (1+e)/(1-e)$ et $\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = (1-e)/(1+e)$. Donc $v = (1-e)^2/(1+e)^2$ et en passant à la racine carrée, le signe étant fixé par le fait que $0 < \phi < \pi \implies 0 < \psi < \pi$, on obtient

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \quad (79)$$

Cela reste valable sur \mathbb{R} car $\psi(-\phi) = -\psi(\phi)$, $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi) + 2\pi$ et tg est π -périodique.

On peut aussi retrouver cette formule en faisant jouer à E un rôle intermédiaire. Il est en effet clair en considérant la symétrie de l'ellipse dans son petit axe que

$$E(\pi - \psi) = \pi - E(\phi) \quad (80)$$

et nous savons que $\phi \mapsto \pi - E(\phi)$ est son propre inverse donc

$$\phi = \pi - E(E(\pi - \psi)) \quad (81)$$

et aussi à partir de (80) sous la forme $\pi - E(\pi - \psi) = E(\phi)$ et le fait que $x \mapsto \pi - E(x)$ est son propre inverse on obtient

$$\pi - \psi = \pi - E(E(\phi)) \quad (82)$$

soit (on aurait dû commencer par là...):

$$\boxed{\psi = E(E(\phi))} \quad (83)$$

retrouvant ainsi (79).

La transformation homographique faisant passer de $\cos \phi$ à $\cos \psi$ est donc l'itérée de celle de matrice $\begin{pmatrix} a & -c \\ -c & a \end{pmatrix}$ (cf. équation (44)), c'est

$$\cos \psi = \frac{(a^2 + c^2) \cos \phi - 2ac}{a^2 + c^2 - 2ac \cos \phi} = \frac{(1 + e^2) \cos \phi - 2e}{1 + e^2 - 2e \cos \phi} \quad (84)$$

qui est juste une écriture équivalente à (77). Et on échange ϕ et ψ en remplaçant e par $-e$.

On peut exprimer $\frac{\phi - \psi}{2}$ comme fonction de $\frac{\phi + \psi}{2}$ par la même méthode que pour la relation entre $\frac{\phi - E}{2}$ et $\frac{\phi + E}{2}$. Le calcul donne:

$$\frac{\sin \frac{\phi - \psi}{2}}{\sin \frac{\phi + \psi}{2}} = \frac{(1 + e) - (1 - e)}{(1 + e) + (1 - e)} = e \quad (85)$$

soit encore avec $\theta = \frac{\phi + \psi}{2}$:

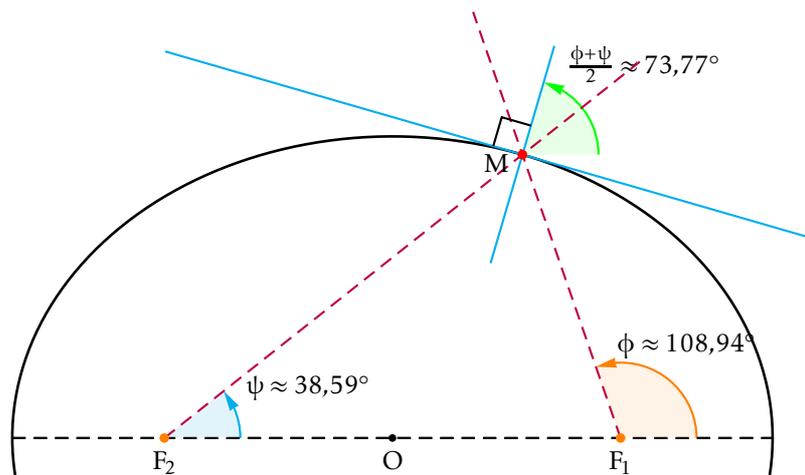
$$\phi = \theta + \text{Arcsin}(e \sin \theta) \quad (86)$$

$$\psi = \theta - \text{Arcsin}(e \sin \theta) \quad (87)$$

On peut aussi vouloir relier $\frac{\phi + \psi}{2}$ à l'angle E :

$$\text{tg} \frac{\phi + \psi}{2} = \frac{\text{tg} \frac{\phi}{2} + \text{tg} \frac{\psi}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\phi}{2} \text{tg} \frac{\psi}{2}} = \frac{(1 + \frac{1-e}{1+e}) \text{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \frac{1-e}{1+e} \text{tg}^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{2}{1+e} \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tg} \frac{E}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{E}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \text{tg} E = \frac{a \sin E}{b \cos E} \quad (88)$$

Or la tangente à l'ellipse au point $(a \cos E, b \sin E)$ est l'image par la transformation affine de celle au cercle, donc a pour vecteur directeur $(-a \sin E, b \cos E)$, et comme vecteur directeur de la normale extérieure on obtient $(b \cos E, a \sin E)$ (qui est aussi $(\frac{b}{a} x, \frac{a}{b} y)$).



Conclusion :

Théorème 8. *La bissectrice intérieure au point M aux droites MF₁ et MF₂ est normale à la tangente en M à l'ellipse.*

Cette démonstration repose donc sur $\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$.

Rappelons pour mémoire la démonstration classique beaucoup plus simple: soit \vec{u} et \vec{v} les vecteurs unitaires $\overrightarrow{F_1M}/d(F_1, M)$ et $\overrightarrow{F_2M}/d(F_2, M)$. La différentielle de l'identité $d(F_1, M) + d(F_2, M) = 2a$ est $\frac{2\overrightarrow{F_1M} \cdot d\vec{M}}{2\|\overrightarrow{F_1M}\|} + \frac{2\overrightarrow{F_2M} \cdot d\vec{M}}{2\|\overrightarrow{F_2M}\|} = 0$, soit encore $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot d\vec{M} = 0$ qui est l'affirmation du théorème.