Rotations vectorielles (en dimension 3)

Jean-François Burnol, 12 décembre 2019
(version du 13 décembre, quelques coquilles corrigées)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et de la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ canonique. Le produit scalaire est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Par contre la notion de produit vectoriel est initialement supposée inconnue. Car elle a mis très longtemps à être dégagée et l'un des buts de ce texte est de montrer que réfléchir aux transformations orthogonales directes de l'espace mène à son invention, surtout si l'on a des objectifs *concrets* (sic), comme d'écrire explicitement la matrice de « la rotation d'angle de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'angle t » dans la base canonique ! Ce sont toujours les considérations concrètes qui amènent aux vraies découvertes.

Les résultats de la théorie dans $\mathbb{R}^2$ sont admis et d'ailleurs indispensables pour établir la théorie dans $\mathbb{R}^3$, donc nous commençons par en rappeler quelques aspects importants.

Angle d'une rotation en dimension 2 Pour $\mathbb{R}^2$ muni des structures canoniques (en particulier une orientation, on décide que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base directe !) on sait que les transformations orthogonales directes sont $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la matrice de $\mathcal{R}(t)$ dans la base canonique (ou n'importe quelle base orthonormée directe) étant :

$$\mathrm{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \exp(t\mathrm{J}) \qquad \text{avec } \mathrm{J} = \mathrm{R}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est l'angle de la rotation bi-dimensionnelle $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$. Il est crucial de réaliser que la même transformation, si l'on change l'orientation du plan, aura pour matrice dans les B.O.N. directes non plus $\mathrm{R}(t)$ mais $\mathrm{R}(-t)$. En effet la matrice de $\mathcal{R}(t)$ dans la base $(\vec{j}, \vec{i})$ est $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(-t)$.

Donc, sur un plan euclidien privé d'une orientation, on ne peut associer à une rotation (transformation orthogonale de déterminant $+1$) qu'un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ divisé par l'action du groupe multiplicatif ± 1 (sur $[0, 2\pi]$ c'est la même chose que $t \leftrightarrow 2\pi - t$). Comme ensemble ce quotient est $[0, \pi]$ (ou encore via le cosinus $[-1, 1]$) mais attention il ne faut pas confondre ceci avec $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, il n'y a plus de structure de groupe,[1] et puisque deux transformations distinctes correspondent à chaque $0 < t < \pi$, et on ne peut donc pas dire quel sera le t pour la composée de deux telles transformations connaissant seulement le t_1 pour la première et le t_2 pour la seconde.

Transformations orthogonales directes dans l'espace Une transformation vectorielle f de $\mathbb{R}^3$ est dite orthogonale si elle respecte le produit scalaire. On montre que ceci équivaut pour sa matrice M_f dans $\mathcal{B}$ d'être ce qu'on appelle une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que ${}^t\mathrm{M}_f\mathrm{M}_f = \mathrm{I}_3$. En effet cette dernière relation signifie que les colonnes de M_f sont mutuellement perpendiculaires et chacune de norme 1, autrement dit qu'elles forment une B.O.N, et on montre que f est une transformation orthogonale si et seulement si $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est une B.O.N. (laissé en exercice).

En prenant le déterminant, on obtient $\det f = \det \mathrm{M}_f = \pm 1$. Le reste du texte est dédié aux transformations orthogonales directes, c'est-à-dire celles de déterminant $+1$.

Théorème 1. *Toute f orthogonale directe non triviale (i.e. distincte de l'identité) possède* 1 *comme valeur propre avec multiplicité* 1 *et il existe une B.O.N. directe dans laquelle la matrice de f est* $\mathrm{R}(\vec{i}, t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ *pour un certain* $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Remarque 1. Attention ! Comme on le verra à l'issue de la preuve, il existe aussi une B.O.N. directe dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{R}(\vec{i}, -t)$! Le paramètre $\cos t \in [-1, 1[$ (ici $\cos(t) < 1$ uniquement car l'énoncé a exclu $f = \mathcal{I}d$) est lui défini de manière unique. D'ailleurs $\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} \mathrm{R}(\vec{i}, t) = 1 + 2\cos t$. Le t est défini de manière unique si et seulement si il vaut π (ce qui équivaut à $\operatorname{tr} f = -1$). Il est donc abusif (sauf si $t \bmod 2\pi \in \{0, \pi\}$) de dire « soit f est une rotation d'angle t », l'expression réellement correcte étant « soit f une rotation de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'angle t ».

Démonstration. Nous sommes en dimension 3, le polynôme caractéristique possède au moins une racine réelle λ. En considérant un vecteur propre associé, on voit que l'on doit avoir $\lambda^2 = 1$.

[1] et $[0, \pi]$ n'est pas homéomorphe à $\mathrm{S}^1 \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \approx \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\ldots$

Nous allons considérer d'abord le cas de f ayant $\lambda = -1$ comme valeur propre. Notons $\vec{u}$ un vecteur propre unitaire associé et soit V le plan perpendiculaire, dans lequel nous choisissons une B.O.N. $(\vec{v}, \vec{w})$ telle que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct. Si $\vec{x} \in \mathrm{V}$ alors $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{u}) = \vec{x} \cdot \vec{u} = 0$ d'une part et vaut $-f(\vec{x}) \cdot \vec{u}$ d'autre part donc $f(\vec{x}) \in \mathrm{V}$ et $f(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$ ($\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$). Nous considérons V comme un plan euclidien orienté en déclarant que $(\vec{v}, \vec{w})$ en est une B.O.N. directe. Comme $(f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{w})) = (-\vec{u}, f(\vec{v}), f(\vec{w}))$ est directe dans $\mathbb{R}^3$, $(\vec{u}, f(\vec{v}), f(\vec{w}))$ est indirecte et $(f(\vec{v}), f(\vec{w}))$ est indirecte dans V, et par la théorie 2-dimensionnelle on sait qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale et qu'on peut choisir la base directe de V de sorte que $f(\vec{v}) = \vec{v}$ et $f(\vec{w}) = -\vec{w}$.

Ainsi si -1 est valeur propre de la transformation orthogonale directe f, alors elle l'est avec multiplicité 2 exactement, 1 est valeur propre avec multiplicité 1, et f est la symétrie orthogonale dans l'espace propre correspondant (qui est une droite vectorielle). Ceci correspond à $t = \pi$ dans l'énoncé du théorème.

Si -1 n'est pas valeur propre, alors nécessairement 1 l'est puisqu'on a déjà dit que f admettait au moins une valeur propre réelle. Considérons $\vec{u}$ unitaire tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et définissons V comme précédemment. À nouveau $f(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$ et maintenant f induit une transformation directe du plan euclidien V, orienté par le choix de $(\vec{v}, \vec{w})$. Cette transformation est une rotation qui est soit l'identité soit n'a aucun vecteur propre (réel). Donc soit f est la transformation identité soit elle admet 1 comme valeur propre avec multiplicité exactement 1 et la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est telle qu'indiquée.

Cependant dans la base directe $(-\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ la matrice de f sera celle indiquée après remplacement de t par $-t$, d'où la remarque suivant l'énoncé du théorème. □

On note S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ qui reviendra plusieurs fois par la suite.

Définition 1. Pour $\vec{u} \in \mathrm{S}^2$ et $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ on note $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ la transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, donc dans toutes les B.O.N. directes ayant $\vec{u}$ comme premier vecteur, est $\mathrm{R}(\vec{i}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. En particulier pour $t = 0$, $\mathcal{R}(\vec{u}, 0)$ est la transformation identité, quel que soit le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Remarque 2. La matrice de $\mathcal{R}(\vec{i}, t)$ dans la base canonique est $\mathrm{R}(\vec{i}, t)$. Exercice : écrire la matrice $\mathrm{R}(\vec{k}, t)$ de $\mathcal{R}(\vec{k}, t)$ et la matrice $\mathrm{R}(\vec{j}, t)$ de $\mathcal{R}(\vec{j}, t)$. Pour le moment ce sont les seuls vecteurs (au signe près) $\vec{u}$ pour lesquels on sache écrire $\mathrm{R}(\vec{u}, t)$, matrice de $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$! Cette question est intimement liée à la notion de produit vectoriel, comme nous le verrons plus tard.

Théorème 2. *Pour* $(\vec{u}_i, t_i) \in \mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$, $\mathcal{R}(\vec{u}_1, t_1) = \mathcal{R}(\vec{u}_2, t_2)$ *avec* $(\vec{u}_1, t_1) \neq (\vec{u}_2, t_2)$ *si et seulement si*

(a) $t_1 = t_2 = 0$, ou
(b) $t_1 = -t_2$ et $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$.

Attention que le dernier cas comporte aussi $t_1 = t_2 = \pi \pmod{2\pi}$ avec $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$.

Démonstration. On a déjà vu que $\mathcal{R}(-\vec{u}, -t) = \mathcal{R}(\vec{u}, t)$. Et il est déjà connu tacitement que $\mathcal{R}(\vec{u}, t) = \mathcal{R}(\vec{u}, t')$ implique $t = t'$. Si $\mathcal{R}$ est donnée et n'est pas l'identité, elle ne peut s'écrire $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ (et on a vu qu'en effet $\mathcal{R}$ est toujours de la forme $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$) que si $\vec{u}$ est vecteur propre unitaire or on sait que $\mathcal{R}$ n'en a que deux. □

Composantes connexes Revenons au groupe $O_3(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices M telles que ${}^t\mathrm{M}\cdot\mathrm{M} = \mathrm{I}_3$. C'est un sous-ensemble fermé (car défini par deux équations continues puisque polynomiales) de $S^2 \times S^2 \times S^2$ donc un espace métrique compact. Le sous-groupe $SO_3(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes est connexe : tout élément peut s'écrire sous la forme $\mathrm{M} = \mathrm{R}(\vec{u}, t)$ et on peut modifier continûment t pour l'amener en 0 et donc M en I_3. L'autre composante connexe de $O_3(\mathbb{R})$ est celui des matrices de déterminant -1 : car $\mathrm{M} \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $-\mathrm{M} \in O_3(\mathbb{R})$ et $\det(-\mathrm{M}) = -\det \mathrm{M}$, donc $O_3(\mathbb{R}) = SO_3(\mathbb{R}) \cup (-SO_3(\mathbb{R}))$.

En dimension 2 on avait les rotations et les symétries orthogonales, mais ici les transformations indirectes sont plus complexes : certes il y a les symétries orthogonales dans des plans, mais aussi leurs composées avec une rotation d'axe perpendiculaire à ces plans, comme on voit immédiatement sur le fait que toute transformation orthogonale indirecte distincte de $-\mathrm{Id}$ est de la forme $-\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ qui envoie $\vec{u}$ sur $-\vec{u}$ et effectue une rotation d'angle $t + \pi$ dans le plan perpendiculaire.

Angle de deux vecteurs dans l'espace Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ linéairement indépendants. Soit V le plan engendré. Pour définir leur angle θ, il *faut* une orientation sur V. *Par convention*, on décide que c'est celle qui fait de $(\vec{u}, \vec{v})$ un repère direct. Donc on a alors θ ayant nécessairement un représentant dans $]0, \pi[$. Ainsi, l'« angle » entre deux vecteurs indépendants est forcément dans $]0, \pi[$.

Attention donc à la confusion pouvant survenir si le plan V pour une raison ou une autre a déjà été muni d'une orientation... C'est le cas des plans engendrés par $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k})$, ou $(\vec{k}, \vec{i})$ liés à la base orthonormée canonique. S'ils contiennent deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ indépendants on peut parler de leur angle bi-dimensionnel qui aura lui une détermination dans $]0, \pi[\, \cup \,]\pi, 2\pi[$. Ce n'est donc l'angle défini au paragraphe précédent que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est direct pour V.

Le cosinus de l'angle est lui toujours défini sans ambiguïté et d'ailleurs on a la formule connue $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\theta)\, \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

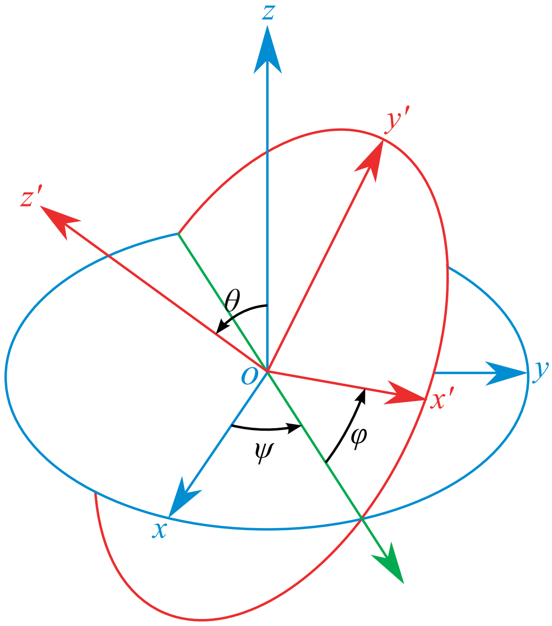

FIGURE 1 – Angles d'Euler
merci à `https://fr.wikipedia.org/wiki/Angles_d%27euler`

Angles d'EULER On considère une transformation orthogonale directe avec $f(\vec{i}) = \vec{i}'$, $f(\vec{j}) = \vec{j}'$, $f(\vec{k}) = \vec{k}'$, et on suppose $\boxed{\vec{k}' \neq \pm\vec{k}}$. Le point P sur la sphère S^2 avec $\overrightarrow{OP} = \vec{k}'$ est distinct du pôle nord et du pôle sud et peut donc être repéré de manière unique par sa latitude et sa longitude $\psi \in [0, 2\pi[$. Dans le contexte de l'étude des rotations dans solide (ou d'un référentiel lié à un solide) on utilise l'angle θ (angle de *nutation*, 90° moins la latitude, donc $0 < \theta < \pi$) et on désigne ψ (longitude) sous le nom d'*angle de précession*. Un troisième angle φ est défini ainsi : le plan perpendiculaire à $\vec{k}'$ intersecte le plan $(\vec{i}, \vec{j})$ en une droite vectorielle, dite *ligne des nœuds*. Il existe sur cette droite un vecteur unitaire $\vec{u}$ unique tel que $(\vec{k}, \vec{k}', \vec{u})$ soit direct (ou de manière équivalente $(\vec{u}, \vec{k}, \vec{k}')$ est direct). L'angle de précession ψ est celui fait par $\vec{u}$ avec $\vec{i}$ dans le plan orienté $(\vec{i}, \vec{j})$. On note $\vec{v}$ le vecteur unitaire dans $(\vec{i}, \vec{j})$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal direct, puis $\vec{v}'$ le vecteur unitaire dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}'$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}', \vec{k}')$ est une B.O.N. directe. Il existe une unique rotation de vecteur directeur $\vec{k}'$ qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{i}'$ (et donc $\vec{v}'$ sur $\vec{j}'$). Son angle est noté φ et est appelé angle de *giration*.

Pour suivre ces constructions, voir l'image Figure 1.

$$
\begin{array}{cc}
(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \\
\downarrow & \mathrm{R}(\vec{k}, \psi) \\
(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) & \\
\downarrow & \mathrm{R}(\vec{i}, \theta) \\
(\vec{u}, \vec{v}', \vec{k}') & \\
\downarrow & \mathrm{R}(\vec{k}, \varphi) \\
(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') &
\end{array}
$$

On a indiqué à chaque fois la matrice de passage. Au final on obtient l'identité matricielle

$$\mathrm{M}_f = \mathrm{R}(\vec{k}, \psi)\mathrm{R}(\vec{i}, \theta)\mathrm{R}(\vec{k}, \varphi)$$

avec $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Et ces angles sont uniques, car à la décomposition matricielle on associe des matrices de passages, donc des bases, donc des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ avec certaines propriétés qui les caractérisent uniquement à partir de $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ (par exemple $\vec{u}$ engendre l'intersection des plans $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i}'\vec{j}')$ en formant un trièdre direct avec $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ dans cet ordre).

Ceci donne aussi

$$f = \mathcal{R}(\vec{k}, \psi) \circ \mathcal{R}(\vec{i}, \theta) \circ \mathcal{R}(\vec{k}, \varphi)\,,$$

et, remarquablement, il y a une autre écriture :

$$f = \mathcal{R}(\vec{k}', \varphi) \circ \mathcal{R}(\vec{u}, \theta) \circ \mathcal{R}(\vec{k}, \psi)\ !$$

En effet si l'on suit ces transformations on voit que $\vec{k}$ est envoyé sur lui-même puis $\vec{k}'$ puis ne bouge plus et que $\vec{i}$ est envoyé sur $\vec{u}$ (précession) puis ne bouge pas puis est envoyé sur $\vec{i}'$ (giration). L'image de ces deux vecteurs suffit à déterminer la transformation orthogonale directe composée. La deuxième écriture cependant, nous ne pouvons pas pour le moment la convertir en écriture matricielle concrète car *nous ne savons pas encore* comment écrire les matrices $\mathrm{R}(\vec{k}', \varphi)$ ni même $\mathrm{R}(\vec{u}, \theta)$!

Pour voir à quoi ressemble la première écriture avec des matrices, qui elle est explicite, et donc ce qu'est M_f je renvoie à `https://fr.wikipedia.org/wiki/Angles_d%27euler`. Et que vaut l'angle (au signe près) de la rotation f ? eh bien $\operatorname{tr} f = 1 + 2\cos(t)$ donne le cosinus. Je vous laisse écrire la formule...

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$ (admis) Toujours avec $f(\vec{k}) \neq \pm\vec{k}$ on a vu comment caractériser f par $\vec{k}' = f(\vec{k})$ (un point de S^2, distinct des pôles nord et sud) et un angle de giration $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ à partir de la ligne (orientée) des nœuds. Celles avec $f(\vec{k}) = \vec{k}$ sont paramétrées par l'image de $\vec{i}$ qui est un point du cercle S^1 dans le plan horizontal et celles avec $f(\vec{k}) = -\vec{k}$ sont (comme nous l'avons vu déjà) des symétries orthogonales par rapport à une droite dans le plan horizontal, donc sont paramétrées par le quotient de S^1 par la symétrie centrale $\mathrm{P} \to -\mathrm{P}$, que l'on peut aussi identifier à S^1 en identifiant le passage au quotient par le passage du nombre complexe z au nombre complexe z^2.

Il y a cependant une obstruction topologique à recoller de manière continue tous ces $\mathrm{P} \times \mathrm{S}^1$ on a un $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$. Ou encore :

Théorème 3 (Admis !). *Il n'existe pas de fonctions continues $\vec{v}(\vec{u})$, $\vec{w}(\vec{u})$ définies sur tout S^2 et telles que $(\vec{u}, \vec{v}(\vec{u}), \vec{w}(\vec{u}))$ soit toujours une base orthonormée directe. Ou encore, il n'est pas possible d'associer de manière continue à tout point P de S^2 un vecteur unitaire $\vec{v}_{\mathrm{P}}$ tangent à la sphère en P, ou encore tout « champ de vecteurs » continu sur la sphère possède nécessairement des touffes rebelles, où le vecteur en P est colinéaire au rayon $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.*

Sinon il y aurait une bijection continue de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ vers $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$ donc un homéomorphisme. Pour montrer l'impossibilité d'une telle chose, il me semble qu'il faut quelques notions de topologie algébrique, en particulier la notion de groupe de Poincaré (ou premier groupe fondamental). Celui de $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$ est $\mathbb{Z}$ mais il découlera de la construction (j'allais dire de Cayley, mais plus je me renseigne moins je suis sûr des attributions !) liée aux quaternions qu'en fait celui de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: *lorsque l'on parcourt dans les matrices de rotations un chemin continu de I_3 vers I_3, il n'est pas toujours possible de déformer ce chemin continûment vers le chemin constant, mais il est toujours possible de déformer un double parcours du chemin en un chemin constant en maintenant les extrémités constamment en la matrice identité.*

On voit que justifier tout cela nécessite un certain outillage, je suis donc amené à ne pas aller plus loin et à admettre cette impossibilité topologique non triviale (je crois) et que je répète encore ici :

Il est impossible de définir sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ tout entier des fonctions vectorielles partout continues $\vec{v}(\vec{u})$, $\vec{w}(\vec{u})$ et telles que $\det(\vec{u}, \vec{v}(\vec{u}), \vec{w}(\vec{u}))$ soit toujours non nul.

Autrement dit les algébristes avec leur *Théorème de la base incomplète* sont bien optimistes.

Le paragraphe suivant en est donc d'autant plus remarquable.

Le produit vectoriel Il est possible de compléter tout couple libre $(\vec{u}, \vec{v})$ en une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ *avec $\vec{w}$ une fonction continue du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.*

En effet

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$$

et il suffit de prendre $w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$, $w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$, qui donne un vecteur $\vec{w}$ tel que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{w}\|^2 \geqslant 0$$

et de plus on voit que ce $\vec{w}$ est déterminé par la propriété suivante :

$$\forall \vec{z} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) = \vec{w} \cdot \vec{z} \ ,$$

donc ne peut pas être nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants car on peut choisir $\vec{z}$ donnant un déterminant non nul.

On le note $\vec{u} \times \vec{v}$, c'est le *produit vectoriel*. On rencontre parfois la notation $\vec{u} \wedge \vec{v}$ mais elle est en conflit avec les notations de l'algèbre extérieure et donc des formes différentielles sur les variétés et je préfère l'éviter. De plus dans les temps d'avant on apprenait ces choses d'abord dans les cours de Physique et avec la notation $\vec{u} \times \vec{v}$. À partir du moment où je me suis imposé de mettre de petites flèches au dessus de mes vecteurs, je ne vois pas pourquoi je m'arrêterais et n'utiliserais pas d'autres notations des gens réellement impliqués dans la 3D !

Nous voyons que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est toujours direct lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants ; s'ils sont dépendants alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{w}\|^2 = 0$ donc $\vec{w} = \vec{0}$. On a $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \times \vec{v}$ est bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ et antisymétrique, $\vec{u} \times \vec{v}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, est nul s'ils sont dépendants, sinon forme avec eux un repère direct.

Soit f une transformation orthogonale, alors

$$\begin{aligned} \forall \vec{z} \quad (f(\vec{u}) \times f(\vec{v})) \cdot f(\vec{z}) &= \det(f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{z})) \\ &= \det(f) \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \\ &= \det(f)(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{z} \\ &= \det(f) f(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot f(\vec{z}) \end{aligned}$$

donc (compte tenu de $\det(f) = \pm 1$)

$$f(\vec{u} \times \vec{v}) = \det(f) f(\vec{u}) \times f(\vec{v})$$

Du point de vue de la théorie de la représentation des groupes il faudrait donc introduire un nouvel espace W de dimension 3 et faire agir $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dessus par les matrices $\det(\mathrm{M})\mathrm{M}$ au lieu des matrices M, et considérer le produit vectoriel comme allant de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vers W et dire que $\vec{u} \times \vec{v}$ n'est pas un vecteur mais un « vecteur axial ». Je laisse tomber (mais c'est très important aussi en Physique de l'électromagnétisme).

Supposons que $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé. On va montrer quelque chose qu'on a oublié de faire : il existe toujours une unique transformation orthogonale directe f avec $f(\vec{i}) = \vec{u}$

et $f(\vec{j}) = \vec{v}$. En effet le plan $(\vec{u}, \vec{v})$ possède un complément orthogonal qui est une droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{w}$ et on peut imposer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct. La matrice exprimant cette base orthonormée directe dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dans $SO_3(\mathbb{R})$ et donc est la matrice d'une transformation orthogonale f directe. Celle ci est unique avec $f(\vec{i}) = \vec{u}$ et $f(\vec{j}) = \vec{v}$ car nécessairement $f(\vec{k})$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc proportionnel à $\vec{w}$, donc égal à $\vec{w}$.

Comme $f(\vec{k}) = f(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{u} \times \vec{v}$ on en déduit :

Théorème 4. *Le produit vectoriel de deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'unique vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit orthonormé direct.*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ indépendants donc $\vec{u} = \|\vec{u}\|\vec{e}$, $\vec{v} = x\vec{e} + y\vec{f}$ avec $(\vec{e}, \vec{f})$ orthonormé, et $0 < y \leqslant \|\vec{v}\|$. L'angle θ vérifie $x = \|\vec{v}\|\cos(\theta)$, $y = \|\vec{v}\|\sin(\theta)$. Donc $\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\theta)\vec{e} \times \vec{f}$ et

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\theta)$$

d'où la formule importante :

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$$

qui se montre aussi par un calcul algébrique direct. On voit par ailleurs l'importance de notre discussion précédente sur l'angle θ défini par deux vecteurs, sinon il faudrait $|\sin(\theta)|$.

Remarque 3. Faisons une *pause* ici et essayons d'être aussi inspiré qu'Euler. La formule ci-dessus dit que le produit de deux sommes de trois carrés peut s'écrire comme la somme de quatre carrés (avec uniquement les opérations de l'algèbre). Vu sous cet angle **évidemment** qu'il faut espérer que ça va se stabiliser là et que le produit de deux sommes de quatre carrés va peut-être pouvoir s'écrire sous la forme d'une somme de quatres carrés. Ou pas. . .

Je vous ai aidé : j'ai donné l'idée. Maintenant trouvez des formules qui marchent ! Euler l'a fait lui !

Bon c'est de la triche car tout le monde sait que ceci est intégré à la théorie des quaternions, qui comme on le verra plus tard comporte

$$(x^2 + \|\vec{u}\|^2)(y^2 + \|\vec{v}\|^2) = z^2 + \|\vec{w}\|^2$$

avec un nombre réel z et un vecteur $\vec{w}$ calculés suivant certaines formules à partir de x, $\vec{u}$, y, $\vec{v}$. En regardant très fort pendant plusieurs semaines

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \ ,$$

puis en prenant un crayon et une feuille de papier on peut être amené à découvrir une formule des quatre carrés via un calcul algébrique qui s'autoriserait des folies imaginaires du type $\vec{u}\vec{u} = -\|\vec{u}\|^2$...

Remarque 4. L'examen de $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ pourrait être fait maintenant. Mais j'ai décidé de le reporter à plus tard.

Définition 2. On note $\mathcal{J}_{\vec{u}}$ l'endomorphisme $\vec{v} \mapsto \vec{u} \times \vec{v}$, et $\mathrm{J}_{\vec{u}}$ sa matrice dans la base canonique.

On pose $\mathrm{I} = \mathrm{J}_{\vec{i}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{J} = \mathrm{J}_{\vec{j}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K} = \mathrm{J}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{J}_{\vec{u}} = u_1\mathrm{I} + u_2\mathrm{J} + u_3\mathrm{K}$.

Un calcul de matrice par bloc montre facilement que $\mathrm{R}(\vec{i}, t) = \exp(t\mathrm{I})$, $\mathrm{R}(\vec{j}, t) = \exp(t\mathrm{J})$, $\mathrm{R}(\vec{j}, t) = \exp(t\mathrm{K})$. C'est général :

Le produit vectoriel comme générateur infinitésimal des rotations Soit $\vec{u}$ unitaire, complété en une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Dans cette base la rotation $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ a (par définition, presque) comme matrice $\mathrm{R}(\vec{i}, t) = \exp(t\mathrm{I})$. L'endomorphisme g de matrice I dans cette base vérifie $g(\vec{u}) = \vec{0} = \vec{u} \times \vec{u}$, $g(\vec{v}) = \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, et $g(\vec{w}) = -\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, donc $g = \mathcal{J}_{\vec{u}}$ et nous obtenons :

Théorème 5. *Pour tout $\vec{u}$ unitaire et $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\mathcal{R}(\vec{u}, t) = \exp(t\mathcal{J}_{\vec{u}})$$

et donc au niveau matriciel $\mathrm{R}(\vec{u}, t) = \exp(t(u_1\mathrm{I} + u_2\mathrm{J} + u_3\mathrm{K}))$.

On s'est rapproché d'une formule explicite pour $\mathrm{R}(\vec{u}, t)$ mais ce n'est pas encore ça... on pourrait étudier les puissances de $\mathrm{J}_{\vec{u}} = u_1\mathrm{I} + u_2\mathrm{J} + u_3\mathrm{K}$, c'est une démarche qui aboutit. Cependant il est plus simple pour le moment de rester avec un esprit un peu géométrique et pas totalement algébrique.

La matrice d'une rotation de vecteur directeur et angle donnés Reprenons $\vec{u}$ unitaire, complété en une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\vec{u}, t)(\vec{v}) &= \cos(t)\vec{v} + \sin(t)\vec{w} = \cos(t)\vec{v} + \sin(t)\vec{u} \times \vec{v} \\ \mathcal{R}(\vec{u}, t)(\vec{w}) &= \cos(t)\vec{w} - \sin(t)\vec{v} = \cos(t)\vec{w} + \sin(t)\vec{u} \times \vec{w} \\ \text{par linéarité} \quad \forall \vec{x} \in \vec{u}^{\perp}\ \mathcal{R}(\vec{u}, t)(\vec{x}) &= \cos(t)\vec{x} + \sin(t)\mathcal{J}_{\vec{u}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathcal{P}_{\vec{u}}$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\vec{u}$, qui agit selon $\vec{x} \mapsto (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u}$ (puisque que $\vec{u}$ est unitaire). On obtient le théorème suivant (on a noté $\mathcal{I}d$ la transformation identité) :

Théorème 6 (Formule de Rodrigues)**.** *La rotation de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ et angle $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ agit selon :*

$$\mathcal{R}(\vec{u}, t)(\vec{x}) = \mathcal{P}_{\vec{u}}(\vec{x}) + \cos(t)(\mathcal{I}d - \mathcal{P}_{\vec{u}})(\vec{x}) + \sin(t)\mathcal{J}_{\vec{u}}(\vec{x})$$

ou encore avec des notations auto-explicatives :

$$\mathcal{R}(\vec{u},t)(\vec{x}) = \vec{x}_{\|} + \cos(t)\vec{x}_{\perp} + \sin(t)\vec{u}\times\vec{x}\,.$$

Et le dernier terme peut aussi s'écrire $\sin(t)\vec{u}\times\vec{x}_{\perp}$ *ce qui rend la formule encore plus simple à comprendre géométriquement (et donc à retrouver si on l'a oubliée).*

Démonstration. C'est vrai si $\vec{x}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et vrai si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$. □

Corollaire 1.

$$\mathrm{R}(\vec{u},t) = \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_2u_1 & u_3u_1 \\ u_1u_2 & u_2u_2 & u_3u_2 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3u_3 \end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix} 1-u_1u_1 & -u_2u_1 & -u_3u_1 \\ -u_1u_2 & 1-u_2u_2 & -u_3u_2 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & 1-u_3u_3 \end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 5. Comme $u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 1$, on confirme que $\operatorname{tr}\mathrm{R}(\vec{u},t) = 1+2\cos(t)$.

On peut reformuler en

$$\mathrm{R}(\vec{u},t) = \cos(t)\mathrm{I}_3 + (1-\cos(t))\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis, et on fait cela en liaison avec la formule $\mathrm{R}(\vec{u},t) = \exp(t\mathrm{J}_{\vec{u}})$, sous la forme :

$$\mathrm{R}(\vec{u},t) = \mathrm{I}_3 + (1-\cos(t))\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_3\right) + \sin(t)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{J}_{\vec{u}}}$$

Si l'on fait un développement au deuxième ordre et que l'on compare à $\exp(t\mathrm{J}_{\vec{u}}) = \mathrm{I}_3 + t\mathrm{J}_{\vec{u}} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{J}_{\vec{u}}^2 + o(t^2)$, on obtient que nécessairement

$$\mathrm{J}_{\vec{u}}^2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_3\,,$$

ce qui signifie qu'au niveau des endomorphismes :

$$\boxed{\forall\vec{x}\qquad \vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{x}) = -\vec{x}_{\perp}}$$

Et par ailleurs on peut maintenant écrire :

$$\mathrm{R}(\vec{u},t) = e^{t\mathrm{J}_{\vec{u}}} = \mathrm{I}_3 + \sin(t)\mathrm{J}_{\vec{u}} + (1-\cos(t))\mathrm{J}_{\vec{u}}^2\,.$$

Voici donc une expression de l'action de $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ qui n'utilise plus le produit scalaire mais uniquement le produit vectoriel :

$$\mathcal{R}(\vec{u}, t)(\vec{x}) = \vec{x} + \sin(t)\vec{u} \times \vec{x} + (1 - \cos(t))\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{x}) \,.$$

Surtout, on soupçonne que $\sin(\frac{t}{2})$ et $\cos(\frac{t}{2})$ sont destinés à jouer un rôle là-dedans : $\mathrm{R}(\vec{u}, t) = e^{t\mathrm{J}_{\vec{u}}} = \mathrm{I}_3 + 2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})\mathrm{J}_{\vec{u}} + 2\sin^2(\frac{t}{2})\mathrm{J}_{\vec{u}}^2$, et on aurait envie de regarder $\cos(\frac{t}{2})\mathrm{I}_3 + \sin(\frac{t}{2})\mathrm{J}_{\vec{u}}$ et son carré mais quelque chose ne va pas avec les facteurs 2. . .

Formule d'Euler pour l'« angle » de la composée de deux rotations Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. On va utiliser la formule de Rodrigues pour composer deux rotations, mais on est un peu poule mouillée et donc dans un premier temps on veut juste la trace de la matrice produit pour extraire l'angle de la rotation composée.

Je vais utiliser les formules précédemment prouvées :

$$\mathrm{R}(\vec{u}, t) = \cos(t)\mathrm{I}_3 + (1 - \cos(t))\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R}(\vec{v}, t') = \cos(t')\mathrm{I}_3 + (1 - \cos(t'))\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} + \sin(t')\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'objectif est de calculer la trace de la matrice produit $\mathrm{R}(\vec{u}, t)\mathrm{R}(\vec{v}, t')$. On va pour cela faire une liste de $\operatorname{tr} AB$ pour $A = \mathrm{I}_3, \mathrm{P}_{\vec{u}}, \mathrm{J}_{\vec{u}}$ et $B = \mathrm{I}_3, \mathrm{P}_{\vec{v}}, \mathrm{J}_{\vec{v}}$:

$\operatorname{tr} \mathrm{I}_3\mathrm{I}_3 = 3$,

$\operatorname{tr} \mathrm{I}_3\mathrm{P}_{\vec{v}} = 1$,

$\operatorname{tr} \mathrm{I}_3\mathrm{J}_{\vec{v}} = 0$,

$\operatorname{tr} \mathrm{P}_{\vec{u}}\mathrm{I}_3 = 1$,

$\operatorname{tr} \mathrm{P}_{\vec{u}}\mathrm{P}_{\vec{v}}$ La matrice est $\vec{u} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ et sa trace est $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2$,

$\operatorname{tr} \mathrm{P}_{\vec{u}}\mathrm{J}_{\vec{v}}$ La matrice est $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 & -u_1v_3 + u_3v_1 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ et sa trace est . . .nulle ! (on est content !),

$\operatorname{tr} \mathrm{J}_{\vec{u}}\mathrm{I}_3 = 0$, tr $J_{\vec{u}}P_{\vec{v}}$ La matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{u}\times\vec{v})_1 \\ (\vec{u}\times\vec{v})_2 \\ (\vec{u}\times\vec{v})_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ et sa trace est le produit scalaire entre $\vec{u}\times\vec{v}$ et $\vec{v}$ donc il est nul (on calcule un peu moins bêtement que tout à l'heure, on est encore plus content !),

tr $J_{\vec{u}}J_{\vec{v}}$ La matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$ et sa trace (en calculant les éléments diagonaux) vaut $-u_3v_3 - u_2v_2 - u_3v_3 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_1v_1 = -2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

En combinant tous ces éléments, on va obtenir l'angle θ (défini au signe près) de la rotation composée :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} R(\vec{u},t)R(\vec{v},t') &= 3\cos(t)\cos(t') + (1-\cos(t))\cos(t') + (1-\cos(t'))\cos(t) \\
&\quad + (1-\cos(t))(1-\cos(t'))(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 2\sin(t)\sin(t')\vec{u}\cdot\vec{v} \\
&= -1 + (1+\cos(t))(1+\cos(t')) \\
&\quad + 4\sin^2(\frac{t}{2})\sin^2(\frac{t'}{2})(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 8\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v} \\
2 + 2\cos\theta &= 4\cos^2(\frac{t}{2})\cos^2(\frac{t'}{2}) \\
&\quad + 4\sin^2(\frac{t}{2})\sin^2(\frac{t'}{2})(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 8\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v} \\
\cos^2\frac{\theta}{2} &= (\cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v})^2
\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\pm\cos\frac{\theta}{2} = \cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v}}$$

Cette formule était connue d'EULER et est liée à la *loi des cosinus en trigonométrie sphérique*.

Ainsi si l'on compose les rotations dans l'autre sens on obtient donc le *même angle*, qui attention je le rappelle n'est défini qu'au signe près. Mais après réflexion on n'a pas à être surpris, cela découle de tr MN = tr NM. Et on peut donc dire par exemple que si A, B, C sont trois rotations alors ABC, BCA, CAB ont toutes le même angle de rotation (en rappelant qu'a priori, ce dernier n'est défini qu'au signe près).

Quaternions L'histoire est bien complexe, car tout le monde sait que HAMILTON a découvert les quaternions, mais RODRIGUES avait déjà donné une formule qui anticipait sur le lien avec les rotations, et EULER savait déjà calculer la composée de rotations et avait trouvé la formule pour les produits de sommes de quatre carrés. Mais bon, faudra que je prenne le temps de lire ce qu'il en est exactement d'un point de vue historique.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ des couples $q = (x, \vec{u})$. Et on définit une application bilinéaire de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ vers $\mathbb{H}$ notée temporairement $q \boxdot q'$ par

$$(x, \vec{u}) \boxdot (y, \vec{v}) = (xy - \vec{u} \cdot \vec{v}, x\vec{v} + y\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v})$$

Par la suite j'écrirai $q = x1 + \vec{u}$, avec donc $1 = (1, 0)$, $\vec{u} = (0, \vec{u})$. On a :

$$\vec{u} \boxdot \vec{v} = (-\vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}1 + \vec{u} \times \vec{v}$$

et en particulier $\vec{u} \boxdot \vec{u} = -\|\vec{u}\|^2 1$ (ce qui fait penser aux nombres imaginaires) et

$$\vec{u} \boxdot \vec{v} + \vec{v} \boxdot \vec{u} = -2(\vec{u} \cdot \vec{v})1$$

qui montre que $\boxdot$ est antisymétrique sur les « quaternions purs » mutuellement orthogonaux pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. La grosse nouveauté par rapport au produit vectoriel c'est que cette antisymétrie cesse de valoir en l'absence d'orthogonalité...

On pose $\mathrm{N}(x1 + \vec{u}) = x^2 + \|\vec{u}\|^2$, et on constate, premier miracle, que $(x1 + \vec{u})(x1 - \vec{u}) = \mathrm{N}(x1 + \vec{u})1$. Par ailleurs

$$\mathrm{N}(\vec{u} \boxdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \mathrm{N}(\vec{u})\mathrm{N}(\vec{v})$$

et mieux encore on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}((x1 + \vec{u}) \boxdot (y1 + \vec{v})) &= (xy - \vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|x\vec{v} + y\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}\|^2 \\
&= x^2y^2 - 2xy\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|x\vec{v} + y\vec{u}\|^2 + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 \\
&= x^2y^2 + x^2\|\vec{v}\|^2 + y^2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \\
&= (x^2 + \|\vec{u}\|^2)(y^2 + \|\vec{v}\|^2) = \mathrm{N}(x1 + \vec{u})\mathrm{N}(y1 + \vec{v})
\end{aligned}$$

Spectaculaire ! C'est une façon d'écrire la formule d'Euler (1748) pour le produit de deux sommes de quatre carrés (que je vous laisse détailler totalement).

On définit le quaternion conjugué $\bar{q}$ de $q = x1 + \vec{u}$ comme étant $\bar{q} = x1 - \vec{u}$ et on obtient $q\bar{q} = \bar{q}q = \mathrm{N}(q)1$. La propriété fondamentale qui nous manque encore est

$$(q \boxdot q') \boxdot q'' = q \boxdot (q' \boxdot q'')$$

On pourrait faire ceci en laissant q, q', q'' généraux mais je vais procéder un peu différemment (attention que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ en général). L'expression est $\mathbb{R}$-trilinéaire à gauche et à droite il suffit de la vérifier pour q, q', q'' prenant chacun les 4 valeurs 1, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Si l'un des trois vaut 1, la formule est vraie. Ne reste donc plus que $3 \times 3 \times 3 = 27$ cas à traiter. Les formules de Hamilton sont

$$\vec{i} \boxdot \vec{i} = \vec{j} \boxdot \vec{j} = \vec{k} \boxdot \vec{k} = -1, \vec{i} \boxdot \vec{j} = \vec{k} \text{ et perm. cycliques et antisymétrie}$$

Si $q = q' \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, il faut vérifier $-q'' = q \boxdot (q \boxdot q'')$. Pour $q'' = q$ cela donne $-q = q \boxdot (-1)$, donc ok, sinon $q \boxdot q''$ est pur et orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ à q, lui aussi pur. La formule est un cas particulier de $-\vec{v} = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ qui est vrai pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires et perpendiculaires.

Si $q = q''$, il faut vérifier $(q \boxdot q') \boxdot q = q \boxdot (q' \boxdot q)$. Si $q = q'$ alors $q \boxdot q' = q' \boxdot q$ est l'élément central -1 de $\mathbb{H}$ et la formule fonctionne. Si $q \neq q'$ alors tous les quaternions seront purs et la formule devient un cas particulier de $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u})$ qui est vrai pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

On s'est ramené à $q \neq q'$ et $q \neq q''$. Si $q' = q''$ il faut vérifier $(q \boxdot q') \boxdot q' = q \boxdot (q' \boxdot q') = -q$ qui devient un cas particulier de $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{u}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires et perpendiculaires.

Ne reste donc qu'à traiter (q, q', q'') étant une permutation de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On va faire $q = \vec{i}$, $q' = \vec{j}$, $q'' = \vec{k}$. Alors $(\vec{i} \boxdot \vec{j}) \boxdot \vec{k} = \vec{k} \boxdot \vec{k} = -1$ et $\vec{i} \boxdot (\vec{j} \boxdot \vec{k}) = \vec{i} \boxdot \vec{i} = -1$. Par invariance par permutation cyclique et par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \longrightarrow (\vec{j}, \vec{i}, -\vec{k})$ de la loi $\boxdot$ on obtient la conclusion.

Inutile de dire que les mathématiciens ont eu le temps d'inventer des dizaines de façon de montrer cette associativité en faisant semblant de ne pas se salir les mains ! Et que beaucoup de références qui expliquent les quaternions ne vérifient même pas l'associativité ! Bref, on est satisfait, il y a bien associativité.

On a donc une $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire. Tout élément q non nul a un inverse à gauche et a droite $(\mathrm{N}(q))^{-1}\bar{q}$. Il s'agit donc d'une algèbre à division, aussi appelée corps gauche ou « corps non commutatif ».

Et on laisse tomber la notation $\boxdot$, et même la distinction entre $q\bar{q} = \mathrm{N}(q)1$ et simplement $\mathrm{N}(q)$, puisque ce 1 est l'unité pour la multiplication de notre corps gauche et qu'on l'identifie au 1 de $\mathbb{R}$, considérant que $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.

Je signale aussi que $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$. En effet on sait déjà que $\mathrm{N}(q_1 q_2) = \mathrm{N}(q_1)\mathrm{N}(q_2)$ donc $q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 \overline{q_1} q_2 \overline{q_2}$, on simplifie par q_1 supposé non nul, puis on utilise que $\mathrm{N}(q_2)$ est un scalaire pour permuter : $q_2 \overline{q_1 q_2} = \overline{q_1} q_2 \overline{q_2} = q_2 \overline{q_2}\,\overline{q_1}$ et maintenant on simplifie par $q_2 \neq 0$. Et réciproquement cette formule $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$ implique la multiplicativité de N (une fois qu'on sait que $\mathrm{N}(q) = q\bar{q} = \bar{q}q$ est scalaire donc commute avec tout).

Représentation quaternionique des rotations de $\mathbb{R}^3$

Théorème 7. *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur unitaire. Avec les produits quaternioniques :*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{R}(\vec{u},t)(\vec{x}) = \left(\cos(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{t}{2})\vec{u}\right)\,\vec{x}\,\left(\cos(\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\vec{u}\right)$$

Première preuve. On développe :

$$\cos^2(\frac{t}{2})\vec{x} + \cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2})(\vec{u}\vec{x} - \vec{x}\vec{u}) + \sin^2(\frac{t}{2})(-\vec{u}\vec{x}\vec{u})$$

On rappelle que la formule de Hamilton est $\vec{x}\vec{y} = -\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\times\vec{y}$, donc $\vec{u}\vec{x} - \vec{x}\vec{u} = 2\vec{u}\times\vec{x}$. Puis en multipliant à gauche cette dernière formule par $\vec{u}$ (qui est unitaire) :

$$-\vec{x} - \vec{u}\vec{x}\vec{u} = 2\vec{u}(\vec{u}\times\vec{x}) = 2\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{x})$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} &= \cos^2(\frac{t}{2})\vec{x} + \sin(t)\vec{u}\times\vec{x} + \sin^2(\frac{t}{2})(\vec{x} + 2\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{x})) \\ &= \vec{x} + \sin(t)\vec{u}\times\vec{x} + (1-\cos(t))\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{x}) \end{aligned}$$

qui est $\mathcal{R}(\vec{u},t)(\vec{x})$ par la formule de Rodrigues. Je rappelle au passage que $\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{x}) = -\vec{x}_\perp$ donc l'expression ci-dessus est aussi $\vec{x}_\parallel + \cos(t)\vec{x}_\perp + \sin(t)\vec{u}\times\vec{x}$. □

Deuxième preuve, meilleure. La clé est $\boxed{\vec{u}\vec{x} - \vec{x}\vec{u} = 2\vec{u}\times\vec{x} = 2\mathcal{J}_{\vec{u}}(\vec{x})}$. Soit $\mathrm{L}_{\vec{u}}$ le $\mathbb{R}$-morphisme de $\mathbb{H}$ de multiplication à gauche par $\vec{u}$ et $\mathrm{R}_{\vec{u}}$ celui de multiplication à droite. Ces deux élément de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ commutent. Donc $g = \exp(\frac{t}{2}(\mathrm{L}_{\vec{u}} - \mathrm{R}_{\vec{u}})) = \exp(\frac{t}{2}\mathrm{L}_{\vec{u}})\circ\exp(-\frac{t}{2}\mathrm{R}_{\vec{u}})$. Or $g(\mathbb{R}^3)\subset\mathbb{R}^3$ et agit sur lui comme $\exp(t\mathcal{J}_{\vec{u}}) = \mathcal{R}(\vec{u},t)$. Et par ailleurs $\mathrm{L}_{\vec{u}}^2 = -\mathcal{I}d$ (par associativité !) et $\mathrm{R}_{\vec{u}}^2 = -\mathcal{I}d$ également. Il est alors facile en développant les exponentielles de conclure que $\exp(\frac{t}{2}\mathrm{L}_{\vec{u}})$ est la multiplication à gauche par $\cos(\frac{t}{2})+\sin(\frac{t}{2})\vec{u}$ et $\exp(-\frac{t}{2}\mathrm{R}_{\vec{u}})$ est la multiplication à droite par $\cos(\frac{t}{2})-\sin(\frac{t}{2})\vec{u}$. Comme cela on découvre la formule au lieu d'avoir à la deviner pour la vérifier ensuite. □

Comme corollaire signalons que $\vec{x}\mapsto -\vec{u}\vec{x}\vec{u}$ est la rotation de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ et d'angle π (on aurait pu le dire avant) et $\frac{1}{2}(1+\vec{u})\vec{x}(1-\vec{u})$ celle d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $\mathrm{Sp}(1)\subset\mathbb{H}^*$, noyau du morphisme N vers $\mathbb{R}^*$. Ce sont donc les quaternions q de la forme $q = x + \vec{x}$ avec $x^2 + \|\vec{x}\|^2 = 1$, autrement dit les points de la sphère euclidienne dans un espace de dimension 4.

Théorème 8. *Pour $q\in\mathrm{Sp}(1)$, la transformation de $\mathbb{H}$ définie par $x\mapsto qx\bar{q}$ laisse stable l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ des quaternions purs et induit sur eux une rotation vectorielle. On a ainsi un morphisme de $\mathrm{Sp}(1)$ vers $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$. Ce morphisme de groupes est surjectif et son noyau est $\{\pm 1\}$ de cardinalité 2.*

Démonstration. Écrivons $q = x + \vec{x}$ avec donc $x^2 + \|\vec{x}\|^2 = 1$. Soit $t \in [0, 2\pi[$ (unique) tel que $x = \cos(\frac{t}{2})$ et $\|\vec{x}\| = \sin(\frac{t}{2})$. Si $\vec{x} = \vec{0}$, $q = \pm 1$ et induit la transformation identité $\mathcal{Id}$ de $\mathbb{R}^3$ qui est une rotation vectorielle.

Sinon, on a $0 < t < 2\pi$, et on note $\vec{u}$ le vecteur unitaire $\vec{x}/\|\vec{x}\|$ de sorte que $q = \cos(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{t}{2})\vec{u}$ et $\bar{q} = \cos(\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\vec{u}$. Le théorème précédent nous dit que la transformation laisse stable $\mathbb{R}^3$ et induit sur lui $\mathcal{R}(\vec{u}, t)$ (qui n'est pas $\mathcal{Id}$).

On a $q_1(q_2 x \overline{q_2})\overline{q_1} = q x \bar{q}$ avec $q = q_1 q_2$ par associativité et la formule sur le conjugué d'un produit.

On a donc un morphisme de groupes de noyau $\{\pm 1\}$. □

Je pense que le théorème précédent est à attribuer à Cayley, mais que celui d'avant qui semble contenir l'essentiel était connu de Hamilton, et que peut-être même il y a des antécédents chez Rodrigues. Il faudrait vraiment que je clarifie ça !

Formule de Rodrigues pour la composée de deux rotations On va le faire par un calcul quaternionique. Il s'agit donc tout bêtement de regarder :

$$\begin{aligned}
&\left(\cos(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{t}{2})\vec{u}\right)\left(\cos(\frac{t'}{2}) + \sin(\frac{t'}{2})\vec{v}\right) \\
&= \cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2}) + \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})\vec{u} + \cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{v} + \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\vec{v} \\
&= \cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v} + \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})\vec{u} + \cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{v} + \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\times\vec{v}
\end{aligned}$$

Nous savons déjà que ce produit est un quaternion unitaire. Peut-il être égal à 1 ou -1 ?

Uniquement si la composée que nous cherchons à calculer est $\mathcal{Id}$ autrement dit les rotations sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire soit elles sont toutes les deux l'identité, soit sinon $\vec{u} = \vec{v}$ et $t + t' \equiv 0 \pmod{2\pi}$, soit encore sinon $\vec{u} = -\vec{v}$ et $t - t' \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Nous excluons ces cas et alors nous savons a priori que le quaternion produit calculé n'est pas ± 1 donc (puisqu'il est dans $\mathrm{Sp}(1)$) a une partie vectorielle non nulle.

Il existe donc (*cf.* la preuve du théorème sur le morphisme de $\mathrm{Sp}(1)$ vers $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$) un unique couple $(\theta, \vec{w})$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$ et $\|\vec{w}\| = 1$ tels que :

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\theta}{2}) &= \cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2}) - \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v} \\
\sin(\frac{\theta}{2})\vec{w} &= \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})\vec{u} + \cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{v} + \sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\times\vec{v}
\end{aligned}$$

Lorsqu'aucun de θ, t, t' n'est congru à π modulo 2π, on peut diviser la seconde équation (vectorielle) par la première (scalaire) puis diviser numérateur et dénominateur par $\cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})$. On obtient la magnifique formule de Rodrigues (1840) :

$$\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2})\vec{w} = \frac{\operatorname{tg}(\frac{t}{2})\vec{u} + \operatorname{tg}(\frac{t'}{2})\vec{v} + \operatorname{tg}(\frac{t}{2})\operatorname{tg}(\frac{t'}{2})\vec{u}\times\vec{v}}{1 - \operatorname{tg}(\frac{t}{2})\operatorname{tg}(\frac{t'}{2})\vec{u}\cdot\vec{v}}$$

qui donne le (un) vecteur directeur de la rotation composée $\mathcal{R}(\vec{u}, t)\circ\mathcal{R}(\vec{v}, t')$.[2]

Signalons qu'Euler savait obtenir l'axe d'une rotation composée via la trigonométrie sphérique. Mais je crois (je suis sûr) qu'il ne disposait pas du formalisme du produit vectoriel.

En tout cas la formule de Rodrigues nous incite à coder la rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle t par $\operatorname{tg}(\frac{t}{2})\vec{u}$ qui est un vecteur porté par l'axe de la rotation. Est-il bien défini ? pour $\vec{u}$ fixé, t l'est modulo 2π donc $\frac{t}{2}$ l'est modulo π et la fonction tangente est π-périodique. Si l'on remplace $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ et simultanément t par $-t$, le vecteur ne bouge pas ! on commence à s'enthousiasmer... si l'on est en train de parler de la rotation identité, $\vec{u}$ est ambigu mais $\operatorname{tg}(\frac{t}{2})$ est nul, on a juste le vecteur nul $\vec{0}$ pas d'ambiguïté ! Il y a cependant le problème des rotations d'angle π. La formule nous amène à considérer des points « à l'infini » $\pm\infty\vec{u}$ et à ne pas distinguer le $+\infty$ et le $-\infty$: car $(\pi, \vec{u})$, $(-\pi, \vec{u})$, $(\pi, -\vec{u})$, $(-\pi, -\vec{u})$ définissent tous la même rotation (symétrie orthogonale dans la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}$). Chaque droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine définit donc un unique point à l'infini ; les points à l'infini sont paramétrés par S^2 modulo la symétrie dans l'origine. On a abouti en fait à l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ bien connu de la géométrie algébrique et qui comme on le sait aussi se définit comme le quotient de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ par l'action multiplicative de $\mathbb{R}^*$ (ou encore l'espace des droites passant par l'origine de $\mathbb{R}^4$) soit encore la sphère unité S^3 quotienté par la symétrie dans l'origine.

On constate a posteriori que de réfléchir à énumérer les rotations par un espace géométrique en réfléchissant seulement aux cas d'ambiguïté dans la paramétrisation par les couples $(\vec{u}, t)$ nous amène (via $\operatorname{tg}(\frac{t}{2})\vec{u}$) à la découverte de l'espace projectif et à anticiper que $SO(\mathbb{R}^3)$ est topologiquement cet espace projectif (réel) de dimension 3 et donc aussi la sphère unité en dimension quatre modulo $\{\pm 1\}$. Peut-être y-a-t-il alors une structure de groupe sur elle qui rende ceci un morphisme ? La formule de Rodrigues donne la loi de composition et on peut en effet réinventer les quaternions à partir d'elle.

Au lieu de $\operatorname{tg}(\frac{t}{2})\vec{u}$ on peut aussi réfléchir à $\sin(\frac{t}{2})\vec{u}$ qui est dans la boule unité de l'espace tri-dimensionnel. Mais ici $t \to t + 2\pi$ renverse le signe donc il faut quotienter par la

[2]Mais comme si on fait ce calcul il faut encore en extraire le vecteur unitaire $\vec{w}$, finalement la formule $\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t'}{2})\vec{u}+\cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{v}+\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{t'}{2})\vec{u}\times\vec{v}$ est tout aussi efficace — en principe, car je ne rentre pas dans les considérations pratiques des calculs sur ordinateur.

symétrie centrale. Attention que ce quotientage n'est pas aussi joli que celui allant de $\mathrm{Sp}(1)$ vers $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ car le point spécial $\vec{0}$ est sa propre classe d'équivalence.

Formule du double produit vectoriel En utilisant les quaternions :

$$\begin{aligned}
4\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= 2\vec{u} \times (\vec{v}\vec{w} - \vec{w}\vec{v}) \\
&= \vec{u}(\vec{v}\vec{w} - \vec{w}\vec{v}) - (\vec{v}\vec{w} - \vec{w}\vec{v})\vec{u} \\
&= \vec{u}\vec{v}\vec{w} - \vec{u}\vec{w}\vec{v} - \vec{v}\vec{w}\vec{u} + \vec{w}\vec{v}\vec{u}
\end{aligned}$$

En utilisant plusieurs fois $\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{x} = -2\vec{x} \cdot \vec{y}$ on poursuit :

$$\begin{aligned}
4\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{u}\vec{v}\vec{w} - \vec{u}\vec{w}\vec{v} - \vec{v}(-2\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u}\vec{w}) + \vec{w}(-2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}\vec{v}) \\
&= 2(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + \vec{u}\vec{v}\vec{w} - \vec{u}\vec{w}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}\vec{w} - \vec{w}\vec{u}\vec{v} \\
&= 2(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u})\vec{w} - (\vec{u}\vec{w} + \vec{w}\vec{u})\vec{v} \\
&= 2(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + 2(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}
\end{aligned}$$

Et finalement

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}}$$

Et en échangeant $\vec{u}$ avec $\vec{w}$ on obtient $\vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{u})$ donc $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$$

On remarque le défaut d'associativité. Je passe sur l'identité de Jacobi.

La démonstration avec les quaternions n'était pas tout-à-fait triviale et en fait je ne connais actuellement pas de démonstration réellement tout-à-fait triviale et ne nécessitant pas de connaître déjà le résultat ou de cacher qu'on sait vers quoi on va. En fait il n'y a rien de sale à faire le calcul algébrique totalement à la main, c'est souvent en mathématiques la meilleure façon de découvrir des choses nouvelles. En admettant cependant que suffisamment de personnes sont passées là-dessus avant nous et qu'il est peu probable de découvrir quelque chose de nouveau je veux bien sortir un raisonnement abstrait :

1. si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont liés, on vérifie que la formule se réduit à $\vec{0} = \vec{0}$,
2. sinon on peut supposer par linéarité que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont unitaires et indépendants ; la formule est linéaire en $\vec{u}$, et
   (a) elle est vraie pour $\vec{u} = \vec{v}$: on sait déjà que pour $\vec{v}$ unitaire on a $\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{w}_\perp = -(\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{v})$,
   (b) elle est vraie pour $\vec{u} = \vec{w}$ par le même calcul au signe près,
   (c) il ne reste plus qu'à la vérifier pour $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ et elle se réduit alors immédiatement à $\vec{0} = \vec{0}$.

Finalement, je rédigerai donc ainsi : si $\vec{v} \times \vec{w}$ est non nul on sait que $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ est une base, et on calcule $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ pour $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{v} \times \vec{w}$:

$$
\begin{aligned}
&= a\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + b\vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + c\vec{0} \\
&= a(\vec{v} \cdot \vec{v})(-\vec{w} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v}) + b(\vec{w} \cdot \vec{w})(\vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\vec{w}) \\
&= (a\vec{v} \cdot \vec{w} + b\vec{w} \cdot \vec{w})\vec{v} - (a\vec{v} \cdot \vec{v} + b\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{w} \\
&= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}
\end{aligned}
$$

. . .à suivre ?? je voudrais revenir sur la composée de deux rotations. . .