CONVEXITÉ ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Tout d'abord une note de terminologie. Certains ouvrages désignent la partie polynomiale $\mathrm{P}_a(h)$ qui apparaît dans un D.L. à l'ordre N d'une fonction f

$$f(a+h) = \mathrm{P}_a(h) + o(h^{\mathrm{N}}) \tag{1}$$

sous le nom de *développement limité de f*. Et encore reste-t-il à savoir si cela désigne la fonction polynomiale $h \mapsto \mathrm{P}_a(h)$, ou plutôt le polynôme P_a, ou si l'on fait référence au polynôme/fonction polynomiale Q_a tel que

$$f(x) = \mathrm{Q}_a(x) + o((x-a)^{\mathrm{N}}) . \tag{2}$$

J'ai eu l'impression lors de conversations pendant la séance du 6 septembre que plusieurs stagiaires partageaient l'une ou l'autre de ses conventions. Personnellement, les mots *développement limité de f à l'ordre* N ont pour moi toujours fait référence à l'intégralité de l'équation (1), mais c'est vrai que du coup il me manque un terme canonique pour désigner $\mathrm{P}_a(h)$.

Bref, la question posée était : *supposons f convexe, admettant un* D.L. *à l'ordre* N *en a, la partie polynomiale* P_a *est-elle convexe ?*

Il est naturel de préciser de suite qu'on demande seulement si P_a est *localement* convexe à l'origine $h = 0$. De plus pour être clair je vais supposer explicitement que a est un point intérieur d'un intervalle de définition de f.

Précisons ce que veut dire localement convexe au voisinage de l'origine pour

$$\mathrm{P}_a(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_{\mathrm{N}} h^{\mathrm{N}} . \tag{3}$$

Je suppose $\mathrm{N} \geqslant 2$ pour toute la suite.

Comme P_a est (infiniment) dérivable, il s'agit de voir si $\mathrm{P}_a'' \geqslant 0$ dans un voisinage de l'origine.

$$\mathrm{P}_a''(h) = 2c_2 + 6c_3 h + 12c_4 h^2 + \cdots + \mathrm{N}(\mathrm{N}-1)c_{\mathrm{N}} h^{\mathrm{N}-2} \tag{4}$$

On aura $\mathrm{P}_a'' \geqslant 0$ au voisinage de l'origine si et seulement si le premier terme non identiquement nul dans cette expression (qui domine les autres et donc donne le signe pour $h \neq 0$ petit) vérifie la condition de positivité.

Comme on a dit que a était un point intérieur, cela veut dire exactement que soit tous les c_j sont nuls, soit celui non nul d'indice J minimal est positif strictement et de plus ce J minimal est pair.

On va maintenant utiliser l'hypothèse, à savoir la convexité de f, donc aussi de la fonction $g(h) = f(a+h) - c_0 - c_1 h$.

Considérons l'expression $k(h) = g(2h)/2h - g(h)/h$ (différence de deux cordes). Pour $h > 0$ dans le domaine de définition il vaut $k(h) \geqslant 0$ car les cordes tirées de l'origine sont croissantes. Pour $h < 0$, on a $k(h) \leqslant 0$ pour la même raison. Or la fonction k admet un développement limité à l'ordre $\mathrm{N}-1$:

$$k(h) = \frac{g(2h)}{2h} - \frac{g(h)}{h} = c_2 h + 3c_3 h^2 + 7c_4 h^3 + \cdots + (2^{\mathrm{N}-1}-1)c_{\mathrm{N}} h^{\mathrm{N}-1} + o(h^{\mathrm{N}-1}) \tag{5}$$

Si tous les c_j, $j \geqslant 2$ sont nuls, c'est bon. Sinon soit J le plus petit indice avec $c_{\mathrm{J}} \neq 0$. Si ce J est impair, alors l'exposant est pair, donc le signe de $k(h)$ pour $h \neq 0$ petit

Date: 7 septembre 2019.

est constant (non nul), ce qui contredit ce qu'on a déjà dit. Donc ce J est pair. Et le coefficient c_J correspondant non nul est nécessairement strictement positif, compte tenu de ce qu'on a dit des signes nécessaires de $k(h)$.

Autrement dit, sous l'hypothèse de convexité de f, soit tous les c_j, $j \geqslant 2$, sont nuls, soit celui c_J non nul d'indice le plus petit est strictement positif et J est pair. Ce qui donne la convexité locale à l'origine de la partie polynomiale du D.L. à l'ordre N, répondant ainsi positivement à la question.

Lorsque a n'est plus un point intérieur mais une extrémité gauche ou droite de l'intervalle de définition de f, il faut reprendre la discussion. Laissé au lecteur.