Relation d'Euler entre cercles circonscrit et inscrit par calcul barycentrique et points de Feuerbach par affixes complexes

Jean-François Burnol

17 et 18 mars 2019

Je prie le lecteur d'excuser l'absence de figures dans ce texte, c'est juste que je ne suis pas très habile à les faire rapidement par logiciel, mais je les ajouterai peut-être plus tard si ce texte a du succès. [1] Évidemment je me suis aidé de nombreuses figures pour le rédiger.

1 Relations entre le rayon du cercle inscrit et celui du cercle circoncscrit

Faites une figure avec un triangle ABC non plat (angles aux sommets α, β, γ), parcouru dans le sens direct, avec I l'intersection des bissectrices intérieures, T_1 (sur BC), T_2 (sur CA), T_3 (sur AB) les points de tangences du cercle inscrit avec les côtés. On note r le rayon du cercle inscrit.

On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, S l'aire du triangle et R le rayon du cercle circonscrit.

En considérant l'aire des triangles ABI, BCI, CAI on obtient la relation $\boxed{S = pr}$ avec S l'aire de ABC et $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre.

On connaît par ailleurs la *loi des sinus* $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. On en déduit la formule $\boxed{S = \dfrac{abc}{4R}}$.

D'où cette formule exprimant le produit rR :

$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c} \tag{1}$$

Euler (1767) et avant lui Chappie (1746) ont obtenu une relation plus cachée entre R, r et la distance d entre les centres des deux cercles :

$$\boxed{d^2 = R^2 - 2Rr} \tag{2}$$

1. Contactez l'auteur pour son compte PayPal.

Autrement dit –2Rr est la puissance du centre du cercle inscrit par rapport au cercle circonscrit.

Nous allons démontrer la relation de Chappie-Euler (2) par le calcul.

2 Coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit

On peut obtenir l'écriture barycentrique $P = tA + uB + vC$ d'un point P en passant par les aires : $\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AC} = u\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, et $u = \mathcal{A}(A, P, C)/\mathcal{A}(A, B, C)$. Pour le point I cela donne immédiatement $u = \frac{1}{2}br/S$, et $t : u : v = a : b : c$. Mais nous préférons faire un petit détour par la trigonométrie pour voir certaines formules aux passages.

Cette section est rédigée sous forme d'un exercice :

1. Tracez la parallèle à AC passant par I et notez W son point d'intersection avec le segment AB, de même tracez la parallèle à AB passant par I et notez V son intersection avec AC. Ainsi
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AW} + \overrightarrow{AV} \tag{3}$$
2. En notant $u = AW/AB$ et $v = AV/AC$ expliquez pourquoi I est le barycentre de A, B, C avec les coefficients $t = 1 - u - v$, u, v.
3. Justifiez $AW = r(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha)$. Cela se simplifie en $AW = r/\sin\alpha$ et peut aussi se voir géométriquement par $AW = WI = IV = VA$ (justifier).
4. Justifiez $c = AB = r(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2})$. Cela s'écrit aussi $c = r \cos \frac{\gamma}{2}/(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2})$.
5. Par des calculs trigonométriques, en utilisant $\beta = \pi - \alpha - \gamma$, justifiez :
$$u = \frac{AW}{AB} = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}) = \frac{\sin\beta}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \tag{4}$$
6. Par permutation cyclique donnez les expressions pour t et v et déduisez-en au passage ces formules (dont nous n'avons pas besoin d'ailleurs) :
$$1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \tag{5}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \tag{6}$$
$$p = \frac{a+b+c}{2} = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \tag{7}$$
7. Conclure que le point I est donné par la formule barycentrique :
$$\boxed{I = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C} \tag{8}$$

Il est amusant de comparer la formule (7) pour p/R à celle-ci pour r/R !

$$\frac{r}{R} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \tag{9}$$

Démonstration. En considérant $AB = AT_3 + T_3B$ on obtient

$$c = r(\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + \text{ctg}\,\frac{\beta}{2}) = r\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = r\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{r\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \tag{10}$$

Or par ailleurs $c = 2R\sin\gamma$ par la *loi des sinus*. D'où le résultat. □

3 Le théorème d'Euler

Ici encore cette section est rédigée sous forme d'un exercice. On note O le centre du cercle circonscrit et d la norme de $\overrightarrow{OI}$. Justifiez chaque ligne du calcul qui suit :

$$\begin{aligned}
d^2 &= \frac{R^2}{(a+b+c)^2}\left(a^2+b^2+c^2+2ab\cos 2\gamma+2bc\cos 2\alpha+2ca\cos 2\beta\right) && (11)\\
&= \frac{R^2}{(a+b+c)^2}\left((a+b+c)^2-4ab\sin^2\gamma-4bc\sin^2\alpha-4ca\sin^2\beta\right) && (12)\\
&= \frac{R^2}{(a+b+c)^2}\left((a+b+c)^2-8S(\frac{c}{2R}+\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R})\right) && (13)\\
&= \frac{R^2}{(a+b+c)^2}\left((a+b+c)^2-4\frac{pr}{R}(a+b+c)\right) && (14)\\
&= R^2-2Rr && (15)
\end{aligned}$$

C'était suffisamment pas évident pour qu'on récapitule :

Théorème 1. *Les rayons* r *et* R *des cercles inscrit et circonscrit et la distance* d *entre les centres des cercles vérifient la relation* $d^2 = R^2 - 2Rr$.

On note au passage comme corollaire l'inégalité d'Euler $r \leqslant \frac{1}{2}R$.

Vous trouverez de nombreuses autres démonstrations dans la littérature...

Je laisse en exercice de déterminer les coordonnées barycentriques du centre I_a du cercle ex-inscrit, opposé au sommet A et de prouver alors la formule $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$. De même pour I_b, d_b, r_b, et I_c, d_c, r_c.

4 Le point de Feuerbach sur le cercle d'Euler

Prenons des affixes complexes avec origine en O, et notons w l'affixe du point I. On va exprimer que w est sur les bissectrices par le fait que $(w-z_1)^2/((z_2-z_1)(z_3-z_1))$ est un nombre réel, et de même par permutation cyclique. On a noté z_1, z_2, z_3 les affixes de A, B, C. Les conditions obtenues sont aussi vérifiées par les centres des 3 cercles ex-inscrits (puisqu'on ne distingue pas ici bissectrice intérieure et bissectrice extérieure – il faudrait regarder le signe du nombre réel égal au quotient considéré), on s'attend donc à une condition polynomiale de degré 4 au final sur w.

Ainsi :

$$\frac{(w-z_1)^2}{(z_2-z_1)(z_3-z_1)} = \frac{(\bar{w}-R^2/z_1)^2}{(R^2/z_2-R^2/z_1)(R^2/z_3-R^2/z_1)} \tag{16}$$

$$= \frac{z_1z_2z_1z_3}{z_1^2}\frac{(\frac{\bar{w}z_1}{R^2}-1)^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \tag{17}$$

ce qui donne

$$(w-z_1)^2 = z_2z_3(\frac{\bar{w}z_1}{R^2}-1)^2 = \frac{z_1z_2z_3}{R^4}z_1\bar{w}^2 - 2\frac{z_1z_2z_3}{R^2}\bar{w}+z_2z_3 \tag{18}$$

puis par permutation cyclique

$$(w-z_2)^2 = \frac{z_1z_2z_3}{R^4}z_2\bar{w}^2 - 2\frac{z_1z_2z_3}{R^2}\bar{w}+z_1z_3 \tag{19}$$

et différence

$$(z_1-z_2)(2w-z_1-z_2) = \frac{z_1z_2z_3}{R^4}(z_2-z_1)\bar{w}^2+(z_1-z_2)z_3 \tag{20}$$

et finalement

$$w = \frac{z_1+z_2+z_3}{2} - \frac{z_1z_2z_3}{2R^4}\bar{w}^2 \tag{21}$$

Si l'on prend le conjugué complexe et qu'ensuite on élminine $\bar{w}$ on obtient la relation de degré 4 annoncée, mais nous n'écrirons pas cette relation car elle ne nous est pas utile.

Nous voyons apparaître l'affixe $(z_1+z_2+z_3)/2$ du centre du cercle d'Euler. Et

Théorème 2. *La distance* δ *entre* I *et le centre du cercle d'*Euler *vaut* $\boxed{\delta = \frac{d^2}{2R} = \frac{R}{2} - r}$.

Démonstration. Il suffit de prendre le module complexe de $\frac{z_1z_2z_3}{2R^4}\bar{w}^2$ qui vaut $\frac{1}{2R}d^2$. Puis on utilise le Théorème 1. □

Ce qui nous donne :

Théorème 3. *Le point* F *dont l'affixe complexe vérifie l'une ou l'autre des relations équivalentes*

$$f = w - \frac{r}{\delta}\frac{z_1z_2z_3}{2R^4}\bar{w}^2 \tag{22}$$

$$f = \frac{z_1+z_2+z_3}{2} - \frac{R}{2\delta}\frac{z_1z_2z_3}{2R^4}\bar{w}^2 \tag{23}$$

est à distance r *de* w *et* $\frac{R}{2}$ *de* $\frac{z_1+z_2+z_3}{2}$ *et le cercle inscrit est tangent intérieurement au cercle d'*Euler *en ce point de* Feuerbach F*.*

Démonstration. Il est clair par (21) et la formule $\delta + r = \frac{R}{2}$ que les deux définitions sont équivalentes et donc que les cercles ont ce point commun. Deux cercles C_1 et C_2 sont tangents intérieurement avec C_2 à l'intérieur de C_1 lorsque leurs rayons R_1 et R_2 et la distance δ de leurs centres vérifient $\delta + R_2 = R_1$, c'est le cas ici avec $R_2 = r$ et $R_1 = \frac{R}{2}$. □

Je rappelle que w désigne l'affixe du centre I du cercle inscrit dans un système avec l'origine en le centre O du cercle circonscrit et donc par notre relation barycentrique on a en fait :

$$w = \frac{az_1 + bz_2 + cz_3}{a + b + c} \tag{24}$$

avec $a = |z_2 - z_3|$, $b = |z_3 - z_1|$, $c = |z_1 - z_2|$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$. Et $|w| = d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = \sqrt{2R\delta}$. On peut donc considérer w connu et que la formule ci-dessus donne explicitement l'affixe complexe du point de Feuerbach F.

Je laisse en exercice par quasiment la même démonstration de prouver l'existence des points de Feuerbach F_a, F_b, F_c points de tangences extérieures des cercles ex-inscrits oppposés aux sommets A, B, C, avec le cercle d'Euler, via leurs affixes complexes f_1, f_2, f_3.

On voit que le plus dur pour les points de Feuerbach était sans doute la relation d'Euler.

5 Coordonnées barycentriques et puissance de l'orthocentre

Faites un dessin avec un triangle acutangle ABC d'orthocentre H. On trace la parallèle à AC passant par H (qui est donc perpendiculaire à HB) et W le point d'intersection avec AB.

Il n'est pas dificile de voir que $WB = HB/\sin\alpha$ et par ailleurs on sait de

`http://jf.burnol.free.fr/agreg190312puissanceorthocentre2.pdf`

que $HB = 2R|\cos\beta|$, ce qui donne la formule (ici on a donc supposé $\beta < \frac{\pi}{2}$, mais la formule est valable aussi si l'angle en B est obtus)

$$\frac{AW}{AB} = 1 - \frac{2R\cos\beta}{c\sin\alpha} \tag{25}$$

Après simplification cela donne, sauf erreur la valeur

$$u = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma} \tag{26}$$

et on en déduit la relation barycentrique (avec au passage $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$) :

Théorème 4. *L'orthocentre* H *est*

$$H = \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma\, A + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma\, B + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta\, C \tag{27}$$

La formule reste valable pour les triangles non-acutangles.

On va s'assurer qu'elle est compatible avec la formule connue

$$z_H = z_1 + z_2 + z_3 \tag{28}$$

pour les affixes complexes ayant pour origine le centre O du cercle circonscrit.

Il s'agit donc de vérifier

$$(1 - \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma)z_1 + (1 - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma)z_2 + (1 - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta)z_3 = 0 \tag{29}$$

ou encore

$$\sin\alpha(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)Re^{i\theta_1} + \cdots = 0 \tag{30}$$

soit

$$-\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)e^{i\theta_1} + \cdots = 0 \tag{31}$$

$$\sin\alpha\cos(\alpha)e^{i\theta_1} + \cdots = 0 \tag{32}$$

$$\sin(2\alpha)\cdot e^{i\theta_1} + \cdots = 0 \tag{33}$$

Mais en effet par le théorème de l'angle inscrit 2α est modulo 2π égal à $\theta_3 - \theta_2$ et on est ramené à vérifier

$$e^{i(\theta_3+\theta_1-\theta_2)} + \text{perm.cycl.} = e^{i(\theta_2+\theta_1-\theta_3)} + \text{perm.cycl.} \tag{34}$$

ce qui est vrai.

On peut alors calculer (à nouveau !) la puissance de l'orthocentre par rapport au cercle circonscrit.

Théorème 5. *La puissance de* H *par rapport au cercle circonscrit est* $-8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Démonstration. On note D la distance OH. De $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OB} + v\overrightarrow{OC}$ on obtient successivement

$$\begin{aligned} D^2 &= R^2(t^2+u^2+v^2+2tu\cos 2\gamma + 2uv\cos 2\alpha + 2vt\cos 2\beta) && (35)\\ &= R^2(1 - 4tu\sin^2\gamma - 4uv\sin^2\alpha - 4vt\sin^2\beta) && (36)\\ &= R^2\Big(1 - 2\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)\Big) && (37)\end{aligned}$$

Mais on a (pour $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ seulement bien sûr, comme pour les autres égalités de ce type rencontrées précédemment) :

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{38}$$

et on obtient la formule finale :

$$D^2 = R^2 - 8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \tag{39}$$

□

Je laisse en exercice (cf. (33) qui a déjà le résultat, ou, par exemple, calculez des aires) le fait que le centre O du cercle circonscrit a comme expression barycentrique :

$$\begin{aligned} O &= \frac{\sin 2\alpha}{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}A + \frac{\sin 2\beta}{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}B + \frac{\sin 2\gamma}{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}C && (40)\\ &= \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)A + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)B + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)C && (41)\end{aligned}$$

L'alignement de O, H et de l'isobarycentre G est visible sur ces coordonnées : $O = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H$, $G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H$.

Lorsque l'on dit qu'un point P a coordonnées barycentriques T : U : V sans avoir de formule pour T + U + V ce n'est que moyennement utile car de toute façon il nous faut manipuler $P = tA + uB + vC$ avec $t + u + v = 1$. Donc j'évite la notation du type $O = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$ qui n'est réellement utile que si l'on donne une formule commode pour la somme des coordonnées homogènes, ici c'est ok avec $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. De même pour l'orthocentre $H = (\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma)$ avec $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ ou le centre du cercle inscrit $I = (\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$ avec $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.