Le cercle des neuf, euh non, des **douze** points

Jean-François Burnol

Jeudi 14 mars 2019

Je prie le lecteur d'excuser l'absence de figures dans ce texte, c'est juste que je ne suis pas très habile à les faire rapidement par logiciel, mais je les ajouterai peut-être plus tard si ce texte a du succès.[1] Évidemment je me suis aidé de nombreuses figures pour le rédiger. Ce texte prend la suite de :

`http://jf.burnol.free.fr/agreg190311puissanceorthocentre.pdf`

`http://jf.burnol.free.fr/agreg190312puissanceorthocentre2.pdf`

mais il peut être lu directement, surtout si l'on est déjà familiarisé avec le cercle d'Euler.

1 Rappels sur le cercle d'Euler

Soit ABC un triangle non plat. L'orthocentre H est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle doublé $A'B'C'$ (A est le milieu de $B'C'$, B le milieu de $C'A'$, C le milieu de $A'B'$), puisqu'il en est l'intersection des médiatrices.

Donc l'homothétie φ de centre l'isobarycentre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie H sur Ω, centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ à ABC, ce qui donne la relation d'Euler :

$$\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}, \qquad \text{puis} \quad \overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G} \tag{1}$$

En passant à des affixes complexes avec origine Ω, cela donne la formule

$$\boxed{h = a + b + c} \tag{2}$$

où bien sûr a, b, c, h sont les affixes de A, B, C, et h. Comme nous saturons un peu avec les formules utilisant les longueurs des côtés, nous nous autorisons ces notations.

Je rappelle rapidement qu'on introduit alors le point J milieu de G et de H (qui est donc d'affixe $(a + b + c)/2$), et qu'on obtient de suite que le cercle de centre J et de rayon R/2 (R = rayon du cercle circonscrit à ABC) est l'image par φ du cercle circonscrit $\mathcal{C}$, donc est le cercle circonscrit aux points milieux I_1 (milieu de BC), I_2 (milieu de CA), I_3 (milieu de AB), qu'on notera $\mathcal{E}$: $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. C'est le cercle d'Euler.

En général, on introduit alors aussi l'homothétie ψ de centre H et de rapport $+\frac{1}{2}$ car clairement elle aussi envoie $\mathcal{C}$ sur le cercle $\mathcal{E}$ de centre J : on a $\psi(\Omega) = J$, puisque $\overrightarrow{H\Omega} = 2\overrightarrow{HJ}$.

Et on explique que cela permet de montrer que les pieds des hauteurs K_1, K_2, K_3 sont sur le cercle $\mathcal{E}$. En effet une propriété connue (facile à voir par un calcul

1. Contactez l'auteur pour son compte PayPal.

d'angles, par exemple) est que le symétrique orthogonal (notons-le provisoirement P) de H dans le côté AB est sur $\mathcal{C}$; or son image par ψ est le milieu de H et de P, qui bien sûr est le pied de la hauteur passant par C, que nous notons K_3. Donc K_3 est sur le cercle d'Euler. De même pour K_1 et K_2.

Encore plus facilement et toujours en utilisant ψ, les points ψ(A), ψ(B), ψ(C), notons les J_1, J_2, J_3, sont sur $\mathcal{E}$: ce sont les milieux entre les sommets et l'orthocentre.

À ce stade on a nos fameux **neuf** points : I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3, et K_1, K_2, K_3. C'est tout ? Non, bon d'ailleurs Wikipédia parle de « dizaines de points », mais je vais me contenter d'en ajouter trois et on verra pourquoi c'est bizarre qu'on n'en parle pas plus d'habitude.

2 Trois « nouveaux » points

Comme Ω est l'orthocentre du triangle des milieux $I_1I_2I_3$, ses symétriques orthogonaux dans les côtés de ce petit triangle sont sur le cercle circonscrit à $I_1I_2I_3$, ceci donne trois nouveaux points L_1, L_2, L_3 sur $\mathcal{E}$. À ce stade il n'est pas évident peut-être que ce soit vraiment de nouveaux points.

Mais commençons pas faire une remarque simple sur la répartition des points construits par rapport au centre J de $\mathcal{E}$:

Théorème 1. *Les points* J_1, J_2, J_3 *(milieux de* AH, BH, CH*) sont les opposés par rapport à* J *des points* I_1, I_2, I_3 *(milieux de* BC, CA, AB*).*

Et les points L_1, L_2, L_3 *(symétriques orthogonaux de Ω dans les côtés de* $I_1I_2I_3$*) sont les opposés par rapport à* J *des points* K_1, K_2, K_3 *(pieds des hauteurs).*

Démonstration. Si l'on part d'un point M d'affixe z, son image par φ a pour affixe $-\frac{1}{2}(z-\frac{a+b+c}{3})+\frac{a+b+c}{3}=-\frac{z}{2}+z_J$. Et son image par ψ a pour affixe $\frac{1}{2}(z-a-b-c)+a+b+c=+\frac{z}{2}+z_J$. Donc à partir de points sur le cercle circonscrit, on obtient toujours des paires de points opposés sur $\mathcal{E}$ en évaluant à la fois φ(z) et ψ(z).

Maintenant les J_1, J_2, J_3, sont les images de A, B, C par ψ et les I_1, I_2, I_3 leurs images par φ. Cela montre la première partie du théorème.

Et, en notant M_1, M_2, M_3 les symétriques orthogonaux de H dans les côtés, dont on a dit qu'ils sont sur $\mathcal{C}$ alors les pieds des hauteurs sont $K_1 = \psi(M_1)$ etc..., tandis que $\varphi(M_1)$ est le symétrique orthogonal de φ(H) = Ω dans la droite image par l'homothétie φ de la droite BC, c'est-à-dire la droite I_2I_3, autrement dit $\varphi(M_1)$ est le point que nous avons noté L_1. Ainsi L_1 est en fait l'opposé du point K_1 dans le centre J du cercle d'Euler.

Et pareillement pour L_2 et L_3 : le centre du cercle d'Euler est le milieu de K_2L_2 et de K_3L_3. □

3 Les affixes complexes

Je vais déterminer les affixes complexes des 12 points.

Pour cela et à titre d'échauffement utilisons les nombres complexes pour retrouver par le calcul la formule h = a + b + c. Si l'on s'y prend mal, ce n'est pas trivial. Le nombre complexe est déterminé par le fait que (h – a)/(b – c) est imaginaire pur, ainsi que $(h-b)/(c-a)$. L'astuce est de re-écrire ça d'une manière à ne pas avoir de conjugués complexes à la fin. On va utiliser crucialement que $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$.

$$\frac{h-a}{b-c} = -\frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} = -\frac{\bar{h}-R^2/a}{R^2/b-R^2/c} = \frac{bc}{a}\frac{a\bar{h}-R^2}{R^2(b-c)} \tag{3}$$

$$h-a = \frac{bc}{R^2}\bar{h} - \frac{bc}{a} \tag{4}$$

Puis par permutation cyclique :

$$h-b = \frac{ca}{R^2}\bar{h} - \frac{ca}{b} \tag{5}$$

Et l'on peut alors éliminer $\bar{h}$:

$$a(h-a) - b(h-b) = -bc + ac \implies (a-b)h = a^2 - b^2 + (a-b)c \implies \boxed{h = a+b+c} \tag{6}$$

Bon, maintenant qu'on est échauffé, déterminons l'affixe du point K_3, pied de la hauteur passant par C. Ce nombre complexe k est caractérisé par le fait que

$$x = \frac{k-a}{b-a} \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad iy = \frac{k-(a+b+c)}{b-a} \in i\mathbf{R} \tag{7}$$

Mais ceci s'écrit très simplement sous cette forme : (!)

$$x - iy = \frac{b+c}{b-a}, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \tag{8}$$

On récupére donc x par la partie réelle :

$$2x = \frac{b+c}{b-a} + \frac{\bar{b}+\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}} \tag{9}$$

$$= \frac{b+c}{b-a} + \frac{R^2/b+R^2/c}{R^2/b-R^2/a} \tag{10}$$

$$= \frac{b+c}{b-a} + \frac{a}{c}\frac{c+b}{a-b} = \frac{b+c-a-\frac{ab}{c}}{b-a} \tag{11}$$

Mais alors

$$k = a + \frac{1}{2}(b+c-a-\frac{ab}{c}) = \frac{a+b+c}{2} - \frac{ab}{2c} \tag{12}$$

$$\boxed{k = z_J - \frac{ab}{2c}} \tag{13}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner les affixes complexes de nos **douze points** :

Théorème 2. *Les douze points sur le cercle des neuf points ont pour affixes complexes :*

1. $z_J - \frac{a}{2}$, $z_J - \frac{b}{2}$, $z_j - \frac{c}{2}$ *pour les milieux* I_1, I_2, I_3,
2. $z_J + \frac{a}{2}$, $z_J + \frac{b}{2}$, $z_Z + \frac{c}{2}$ *pour les points milieux des segments* AH, BH, CH*, c'est-à-dire* J_1, J_2, J_3,
3. $z_J - \frac{bc}{2a}$, $z_J - \frac{ca}{2b}$, $z_J - \frac{ab}{2c}$ *pour les pieds des hauteurs* K_1, K_2, K_3,
4. $z_J + \frac{bc}{2a}$, $z_J + \frac{ca}{2b}$, $z_J + \frac{ab}{2c}$ *pour les points* L_1, L_2, L_3 *qui sont les symétriques orthogonaux de* Ω *dans les droites* I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2.

4 D’autres points ?

En fait, toujours à cause de considérations simples sur les angles (et le théorème de l’angle inscrit), lorsqu’on a un triangle MNP d’orthocentre H, non seulement les symétriques perpendiculaires de H dans les côtés sont sur le cercle circonscrit, mais aussi ses symétriques centraux dans les milieux des côtés.

Si l’on revient à Ω, orthocentre de $I_1I_2I_3$, cela veut dire que les points N_1, N_2, N_3 avec $\overrightarrow{\Omega N_1} = \overrightarrow{\Omega I_2} + \overrightarrow{\Omega I_3}$ etc..., autrement dit les points d’affixes $\frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ etc... sont sur $\mathcal{E}$, mais rien de nouveau ce sont simplement les points milieux des AH, BH, CH, que nous avons notés J_1, J_2, J_3.

Et si l’on prend le symétrique de H par symétrie centrale dans le milieu I_3 de AB, on obtient $z = 2\frac{a+b}{2} - a - b - c = -c$, qui est l’opposé de C dans Ω, et par l’homothétie φ ce point va donner l’opposé de $\varphi(\Omega) = I_3$ (milieu de AB) par rapport au centre du cercle d’Euler. Comme on a vu dans le théorème précédent, c’est à nouveau le milieu J_3 entre l’orthocentre et C.

Désolé pour l’absence de figures.