DROITE D'EULER ET UNE FORMULE REMARQUABLE POUR LA PUISSANCE DE L'ORTHOCENTRE PAR RAPPORT AU CERCLE CIRCONSCRIT (2e PARTIE)

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Ce texte prend la suite du précédent

http ://jf.burnol.free.fr/agreg190311puissanceorthocentre.pdf

Soit ABC un triangle non plat. Soit I sur la droite BC le pied de la hauteur passant par A, J sur la droite CA le pied de la hauteur passant par B, K sur la droite AB le pied de la hauteur passant par C.

Ce n'est peut-être pas évident a priori, mais les distances HA, HB, HC de H aux sommets se trouvent être des quantités plus simples que les distances HI, HJ, HK de H aux droites menées par les côtés.

Nous allons exprimer ces quantités en fonctions des angles au sommet α, β, γ et du rayon R du cercle circonscrit.

Pour être précis au niveau des angles nous définissons α comme l'angle au sommet $\widehat{BAC}$ c'est-à-dire par définition l'angle sous lequel A voit $\overrightarrow{BC}$: l'angle de la rotation de centre A qui amène B sur un point de la demi-droite AC de sommet A. Pour fixer les idées nous supposerons que α a un représentant modulo 2π dans l'intervalle $]0,\pi[$, c'est-à-dire que ABC est parcouru dans le sens direct. De manière familière on peut noter ceci par la notation abusive $\alpha > 0$.

Puis $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{ACB}$ ont également des représentants dans $]0,\pi[$.

mettre ici une figure.

Pour éviter les cas particuliers nous supposons dans tout le texte que le triangle ABC n'est pas rectangle. Ceci équivaut à dire que H ne coïncide avec aucun des sommets, et équivaut aussi à dire que H n'est sur aucun des trois côtés, et équivaut aussi à dire que H n'est sur aucune des trois droites menées par les sommets.

1. Distances de l'orthocentre aux trois sommets

Pour déterminer les distances de H aux sommets nous commençons par définir les points A′, B′, C′ par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC'}$.

On prouve que $\overrightarrow{CB'} = -\overrightarrow{CA'}$ (C est le milieu de A′B′), $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AB'}$ (A est le milieu de B′C′), $\overrightarrow{BA'} = -\overrightarrow{BC'}$ (B est le milieu de A′C′), et donc les parallélismes $\overrightarrow{B'A'} = 2\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = 2\,\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C'B'} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

La perpendiculaire à BC passant par A est ainsi la médiatrice du segment B′C′, etc. . ., et H est le centre du cercle circonscrit à A′B′C′.

mettre ici deux figures, suivant le caractère aigu ou obtu de l'angle beta.

Notons θ l'angle sous lequel H voit la demi-corde $\overrightarrow{BA'}$. Cet angle a une détermination dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Son double est l'angle λ sous lequel H voit la corde $\overrightarrow{C'A'}$.

Par le *théorème des angles inscrits*, λ est aussi le double de l'angle sous-lequel B′ voit cette même corde (que B′ soit dans le même demi-plan délimité par C′A′ que H ou dans l'autre). Par invariance des angles dans les homothéties (ici l'homothétie de centre l'isobarycentre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ car elle envoie A′ sur A, B′ sur B et C′

Date: Mardi 12 mars 2019.

sur C), ce dernier est l'angle sous-lequel B voit $\overrightarrow{CA}$, que nous avons désigné par β. Donc $2\theta = 2\beta$, et θ est égal à β modulo π.

Compte tenu de $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, et $0 < \beta < \pi$, il y a deux possibilités : si le triangle ABC a un angle aigu en B alors $\theta = \beta$, si le triangle a un angle obtus en B alors $\theta = \beta - \pi$. Dans les deux cas $\cos\theta = |\cos\beta|$.

Par ailleurs, le triangle HBA′ étant rectangle, $HB = \cos(\theta)HA' = 2\cos(\theta)R$ avec 2R le rayon du cercle circonscrit à A′B′C′, donc R est le rayon du cercle circonscrit à ABC. Nous obtenons la formule $HB = 2|\cos\beta|R$.

Théorème 1. *Les distances de l'orthocentre* H *aux sommets* A, B, C *sont liés aux angles aux sommets et au rayon du cercle circonscrit par les formules*

$$HA = 2|\cos\alpha|R, \quad HB = 2|\cos\beta|R, \quad HC = 2|\cos\gamma|R$$

2. Calcul de la quantité T

La quantité T vaut $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$ ne change pas si nous déplaçons A perpendiculairement à HC, c'est-à-dire, si nous le déplaçons sur la droite AB. Nous pouvons donc l'amener en K pied de la hauteur passant par C :

$$T = \overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HC} = \overline{HK}\,\overline{HC}$$

mettre ici deux figures suivant les cas acutangle ou obtusangle (en C*).*

Plus précisément, il y a deux cas :

(1) le triangle est acutangle : alors on montre que H est à l'intérieur du triangle, ou encore que H est sur chacun des segments AI, BJ, CK,

(2) le triangle est obtusangle avec l'angle obtus que sans perte de généralité nous supposons en C : alors I est entre A et H, J est entre B et H, et C est entre K et H.

Je laisse les détails de la justification au lecteur. Dans le premier cas les produits de mesures algébriques (qui ont un sens invariant) $\overline{HI}\,\overline{HA}$, $\overline{HJ}\,\overline{HB}$, $\overline{HK}\,\overline{HC}$, sont négatifs, dans le second cas ils sont positifs.

Dans le cas acutangle, il vient $T = -HK\ HC$. Considérant le triangle HKB qui est rectangle en K, puis BJA rectangle en J, on obtient :
mettre ici une figure appropriée

$$\widehat{KHB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{HBK} = \frac{\pi}{2} - \widehat{JBA} = \alpha$$

Par conséquent la distance HK vaut $\cos(\alpha)HB$ et il vient d'après le Théorème 1 :

$$T = -\cos(\alpha)HB\,HC = -\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)4R^2$$

où l'on a tenu compte du fait que β et γ étaient des angles aigus.

Dans le cas obtusangle en C, on a $T = +HK\ HC$. Le calcul donnant $HK = \cos(\alpha)HB$ reste valable (α est un angle aigu) et il vient

$$T = +\cos(\alpha)HB\,HC = \cos(\alpha)|\cos(\beta)||\cos(\gamma)|4R^2$$

or $\cos\beta > 0$ et $\cos\gamma < 0$, donc on a la même formule finale que dans le cas acutangle.

Théorème 2. *La quantité* T *est donnée par la formule*

$$T = -\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)4R^2$$

3. Distance de l'orthocentre aux pieds des hauteurs

Dans le cas acutangle on a par la section précédente $\mathrm{T} = -\mathrm{HK}\,\mathrm{HC} = -\mathrm{HJ}\,\mathrm{HB} = -\mathrm{HI}\,\mathrm{HA}$. Et $\mathrm{HA} = |\cos(\alpha)|2\mathrm{R}$, $\mathrm{HB} = |\cos(\beta)|2\mathrm{R}$, $\mathrm{HC} = |\cos(\gamma)|2\mathrm{R}$ par le Théorème 1. Donc par le Théorème 2

$$\mathrm{HI} = \frac{-\mathrm{T}}{\mathrm{HA}} = \cos(\beta)\cos(\gamma)2\mathrm{R} \tag{1}$$

et les formules analogues pour HJ et HK.

Dans le cas obtusangle on a par la section précédente $\mathrm{T} = +\mathrm{HK}\,\mathrm{HC} = +\mathrm{HJ}\,\mathrm{HB} = +\mathrm{HI}\,\mathrm{HA}$, et on conclut d'une manière générale :

Théorème 3. *Les distances de l'orthocentre* H *aux droites* AB, BC, CA *sont liées aux angles aux sommets et au rayon du cercle circonscrit par les formules*

$$\mathrm{HK} = 2|\cos(\alpha)\cos(\beta)|\mathrm{R}, \quad \mathrm{HI} = 2|\cos(\beta)\cos(\gamma)|\mathrm{R}, \quad \mathrm{HJ} = 2|\cos(\gamma)\cos(\alpha)|\mathrm{R}$$

On peut déduire ces formules directement du théorème 1 sans passer par T, puisqu'il suffit de déterminer les 6 angles en H formés par les 3 hauteurs, je laisse en exercice facile, il y deux figures différentes suivant qu'on est dans le cas acutangle ou le cas obtusangle (et on a déjà déterminé par exemple $\widehat{\mathrm{KHB}}$).

Je rappelle que les triangles rectangles sont traités à part, bien sûr les formules ci-dessus sont valables pour eux.

Notons le corollaire des deux théorèmes 1 et 3 :

Théorème 4. *On a*

$$2\mathrm{R} = \frac{\mathrm{HB}\cdot\mathrm{HC}}{\mathrm{HI}} = \frac{\mathrm{HC}\cdot\mathrm{HA}}{\mathrm{HJ}} = \frac{\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HB}}{\mathrm{HK}}$$

4. Retour sur une identité algébrique remarquable

Comme on l'a vu dans le texte précédent la formule du Théorème 2 s'écrit sous forme algébrique (loi des cosinus, lien entre R et l'aire $\mathcal{A}$, formule de Héron) :

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{2}\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \tag{2}$$

Mais par ailleurs si l'on part de la formule $z_{\mathrm{H}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}$ pour l'affixe de l'orthocentre dans un repère de centre le centre du cercle circonscrit, ou si l'on part de l'interprétation de T comme la moitié de la puissance de H par rapport au cercle circonscrit, ou si l'on pose des équations quadratiques avec $h = \mathrm{CK}$, $x = \mathrm{HK}$, $u = \mathrm{AK}$, $v = \mathrm{BK}$, les calculs algébriques mènent semble-t-il imparablement [1] à une autre formule :

$$\mathrm{T} = 4\mathrm{R}^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = 4\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \tag{3}$$

D'où nécessairement :

$$\boxed{\begin{aligned}&(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\\ &= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) - 8a^2b^2c^2\end{aligned}} \tag{4}$$

Si cette formule vous semble évidente alors bravo ! Le développement de cette quantité est :

$$-a^6 - b^6 - c^6 + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - 2a^2b^2c^2 \tag{5}$$

1. pour être honnête je ne me rappelle plus très bien si en éliminant u et v des relations avec h et x j'avais obtenu la forme qui suit ou une autre.

Une autre identité est apparue dans le texte précédent : si $\alpha+\beta+\gamma \equiv \pi \pmod{2\pi}$ alors

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \tag{6}$$

donc par la loi des cosinus :

$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) = -2a^2b^2c^2(1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma) \tag{7}$$

puis avec $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, etc. . ., on obtient

$$\boxed{\begin{aligned}&(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\\ &= 4a^2b^2c^2 - a^2(b^2+c^2-a^2)^2 - b^2(c^2+a^2-b^2)^2 - c^2(a^2+b^2-c^2)^2\end{aligned}} \tag{8}$$

et je plains encore plus le pauvre malheureux qui a obtenu l'expression du bas et est censé deviner qu'elle se factorise comme en haut.

Si on utilise $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ et $\sin\alpha = 2\mathcal{A}/bc$, il vient

$$-2a^2b^2c^2(4 - 8\mathcal{A}^2\Big(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\Big)) \tag{9}$$

soit

$$-8a^2b^2c^2 + 16\mathcal{A}^2(a^2+b^2+c^2) \tag{10}$$

mais ça c'est précisément (4) (compte tenu de la formule de Héron). En comparant les deux on obtient une autre factorisation inattendue :

$$\boxed{\begin{aligned}&12a^2b^2c^2 - a^2(b^2+c^2-a^2)^2 - b^2(c^2+a^2-b^2)^2 - c^2(a^2+b^2-c^2)^2\\ &= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\end{aligned}} \tag{11}$$

On peut faire un panachage en utilisant $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, etc... mais je laisse. On conservera en tête que des choses pas ordinaires se passent avec $\mathcal{A}^2$!