DROITE D'EULER ET UNE FORMULE REMARQUABLE POUR LA PUISSANCE DE L'ORTHOCENTRE PAR RAPPORT AU CERCLE CIRCONSCRIT

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Je prie le lecteur d'excuser l'absence de figures dans ce texte, c'est juste que je ne suis pas très habile à les faire rapidement par logiciel, mais je les ajouterai peut-être plus tard si ce texte a du succès. [1] Évidemment je me suis aidé de nombreuses figures pour le rédiger.

1. Orthocentre et le challenge de la quantité T

Soit ABC un triangle non plat. Les points H de la hauteur passant par C sont caractérisés par l'équation $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, et ceux de la hauteur passant par B par l'équation $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Si les deux sont vérifiées alors

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} \tag{1}$$

$$= \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \tag{2}$$

$$= 0 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + 0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \tag{3}$$

Donc les trois hauteurs sont concurrentes en un point H, l'orthocentre (deux hauteurs ne sont jamais parallèles sinon les deux côtés leur étant perpendiculaires seraient parallèles).

Théorème 1. *On a* $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$. *On notera* T *cette quantité.*

Démonstration. Pour montrer $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ il suffit de faire la différence des deux termes et d'obtenir

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \tag{4}$$ □

La quantité T est une fonction symétrique des sommets du triangle et doit pouvoir s'exprimer algébriquement en fonction des longueurs a, b, c des côtés. Le challenge est de le faire. Ce texte apporte une solution parmi plusieurs envisagées, mais pour le moment il me manque une approche donnant directement la factorisation de la formule finale (qui est magnifique).

2. Divination du résultat

Si le triangle est rectangle en B, alors H = B et donc T = 0. Donc T s'annule pour les triangles rectangles et il est logique de penser qu'il va faire intervenir le produit [2]

$$X = (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \tag{5}$$

Date: Lundi 11 mars 2019.

1. Contactez l'auteur pour son compte PayPal.
2. Je n'utilise pas la lettre P pour éviter des confusions avec le périmètre.

Cependant ceci est homogène de degré 6 et T est homogène de degré 2 il faut donc diviser par une quantité (non-nulle) homogène de degré 4. Là je n'ai pas d'argument évident (il faudrait étudier a priori comment se comporte T lorsque le triangle se rapproche d'un triangle plat), mais j'ai envie de prendre le carré de l'aire $\mathcal{A}(a,b,c)$.

Pour le triangle équilatéral de côté 1 on trouve rapidement que $\mathrm{T} = -\frac{1}{6}$, tandis que $\mathrm{X} = 1$ et $\mathcal{A}^2 = \frac{3}{16}$. Ceci nous amène à deviner le résultat suivant :

Théorème 2. *La quantité* T *est donnée par la formule* $-\dfrac{\mathrm{X}}{32\mathcal{A}^2}$, *soit encore, en utilisant la formule de* Héron *pour* $\mathcal{A}(a,b,c)$ *:*

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{2}\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \tag{6}$$

Si seulement j'avais fait ça immédiatement lorsque j'ai réfléchi initialement à ce problème ! Hélas, j'ai défini et trouvé T algébriquement et vu la factorisation dans un 2$^{\mathrm{e}}$ temps. Mais d'ailleurs je n'ai pas encore de méthode me donnant T directement sous forme factorisée ; dans ce qui s'en approche le plus je dois néanmoins passer par une identité trigonométrique, on verra cela plus loin. Voici déjà un corollaire :

Théorème 3. *La quantité* T *est :*

(1) strictement positive si le triangle est obtusangle,

(2) nulle si le triangle est rectangle,

(3) strictement négative si le triangle est acutangle.

Démonstration. Par exemple par la loi des cosinus et la formule magique du théorème précédent. Mais on peut le voir plus directement : si le triangle est acutangle, alors H voit le côté AB sous l'angle (absolu) $\alpha+\beta = \pi-\gamma$ qui est obtus (avec α, β, γ les angles du triangle) donc $\mathrm{T} < 0$, et si ABC est obtusangle au sommet C alors H voit AB sous l'angle aigu $\alpha+\beta$ (et BC sous l'angle aigu α, AC sous l'angle aigu β), donc $\mathrm{T} > 0$. Ces angles ne sont pas difficiles à justifier mais je ne poursuis pas cette voie ici. □

3. T et la puissance de l'orthocentre

Soit I le pied sur la droite BC de la hauteur passant par A. On a

$$\mathrm{T} = \overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}} = \overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}} = \overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}} \tag{7}$$

Or une propriété connue de l'orthocentre H est que ses symétriques perpendiculaires dans les côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit : soit H_1 tel que $\overrightarrow{\mathrm{HH}_1} = 2\overrightarrow{\mathrm{HI}}$, ce H_1 est le deuxième point d'intersection de la droite HA avec le cercle circonscrit. Donc :

Théorème 4. *La quantité* T *est la moitié de la puissance de l'orthocentre par rapport au cercle circonscrit.*

D'où ce corollaire : [3]

Théorème 5. *L'orthocentre est situé à l'intérieur du cercle circonscrit si le triangle est acutangle et à l'extérieur du cercle circonscrit si le triangle est obtusangle. S'il est sur le cercle circonscrit il coïncide avec l'un des sommets et le triangle est rectangle.*

3. On sait même bien sûr que l'orthocentre est à l'intérieur du triangle si ce dernier est acutangle.

4. Droite d'Euler

Il est toujours bon d'avoir en tête les démonstrations les plus simples de certaines propriétés, par exemple celle de l'existence même de l'orthocentre.

Considérons le triangle A′B′C′ tel que A est le milieu de B′C′, B est le milieu de C′A′ et C est le milieu de A′B′. Autrement dit on construit les trois parallélogrammes portés par les trois choix de deux côtés du triangle : $\overrightarrow{\mathrm{CA}'} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, etc...

Alors les hauteurs de ABC sont les médiatrices de A′B′C′ et par conséquent :

Théorème 6. *L'orthocentre de* ABC *est le centre du cercle circonscrit à* A′B′C′.

Les deux triangles ont le même isobarycentre G (intersection des médianes A′A, B′B, C′C), et on obtient ABC à partir de A′B′C′ par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. L'image de H, centre du cercle circonscrit à A′B′C′ par cette homothétie est donc le point Ω centre du cercle circonscrit à ABC. C'est le fameux :

Théorème 7 (Euler)**.** *Les trois point* H, G, *et* Ω *sont alignés et* $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = -2\overrightarrow{\mathrm{G}\Omega}$.

Ou encore de manière équivalente :

Théorème 8. *On considère après choix d'un repère orthonormé d'origine* Ω *une identification du plan euclidien avec le plan complexe ; soit* z_{A}, z_{B}, z_{C} *les affixes de* A, B, C, *alors celle de l'orthocentre est donnée par*

$$z_{\mathrm{H}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}} \tag{8}$$

Démonstration. En effet $\overrightarrow{\Omega\mathrm{H}} = 3\overrightarrow{\Omega\mathrm{G}}$: la formule (8) équivaut au Théorème 7. □

Il est clair donc que l'on peut calculer alors algébriquement via les nombres complexes la quantité T en partant par exemple de

$$\mathrm{T} = \overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = \mathbf{Re}((z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{H}}).(\overline{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{H}}})) \tag{9}$$

puisque l'on connaît $z_{\mathrm{H}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}$, mais de là à obtenir la formule symétrique du Théorème 2, il y a des calculs...

De même on peut en principe bien sûr aussi utiliser des coordonnées cartésiennes et calculer les coordonnées de H puis ses distances aux sommets et aux côtés du triangle et donc (avec la formule $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HI}}$ avec I le pied de la hauteur passant par A) on voit qu'on pourra calculer T, mais ces calculs seront-ils lisibles et ne seront-ils pas très longs ?

On peut aussi utiliser l'interprétation de T comme la moitié de la puissance $\Omega\mathrm{H}^2 - \mathrm{R}^2$ du point H par rapport au cercle circonscrit (interprétation qui cependant repose sur une propriété de H que nous n'avons pas établie).

En effet par le théorème d'Euler, on a :

$$\Omega\mathrm{H}^2 = 9\Omega\mathrm{G}^2 = \|\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}\|^2 \tag{10}$$

et on peut calculer assez facilement cette expression (tacitement on passe par la loi des cosinus, ou plutôt par une preuve via le produit scalaire) :

(11)
$$\Omega\mathrm{H}^2 = 3\mathrm{R}^2 + 2\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} + 2\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}$$
(12)
$$= 3\mathrm{R}^2 - (\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}\|^2 - 2\mathrm{R}^2) - (\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}\|^2 - 2\mathrm{R}^2) - (\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\|^2 - 2\mathrm{R}^2)$$
(13)
$$= 9\mathrm{R}^2 - c^2 - a^2 - b^2$$

donc

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\Omega\mathrm{H}^2 - \mathrm{R}^2) = \frac{1}{2}(8\mathrm{R}^2 - a^2 - b^2 - c^2) \tag{14}$$

Maintenant on peut sortir de son chapeau la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\mathrm{R} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \tag{15}$$

ce qui permet d'obtenir :

Théorème 9. *La quantité* T *s'exprime aussi par la formule suivante en fonction des côtés a, b, c et de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle (ou du rayon* R *du cercle circonscrit) :*

$$\mathrm{T} = \frac{a^2b^2c^2}{4\mathcal{A}^2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = 4\mathrm{R}^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \tag{16}$$

Mais de là au Théorème 2 il y a encore du chemin... même s'il s'agit juste d'utiliser la formule de Héron, la factorisation finale semble miraculeuse.

5. Un calcul de T reposant sur l'interprétation de H comme centre du cercle circonscrit au triangle doublé A′B′C′

On a vu que H était le centre du cercle circonscrit à A′B′C′, qui est de rayon 2R. On peut alors mettre T rapidement sous une forme symétrique :

$$\mathrm{T} = \overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{HB'}} + \overrightarrow{\mathrm{HC'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{HA'}} + \overrightarrow{\mathrm{HC'}}) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{HB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA'}} + \overrightarrow{\mathrm{HB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC'}} + \overrightarrow{\mathrm{HC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA'}} + 4\mathrm{R}^2\right) \tag{19}$$

Par les propriétés connues des angles dans les cercles, l'angle sous lequel H voit $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ est le double de celui sous lequel A′ voit ce segment orienté, donc le double de l'angle α sous lequel A voit $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Donc

$$\mathrm{T} = \mathrm{R}^2(1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) \tag{20}$$

On va maintenant invoquer une remarquable identité trigonométrique :

Théorème 10. *Si* $\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi \pmod{2\pi}$ *alors*

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \tag{21}$$

Démonstration. La preuve est très simple (si l'on connaît déjà le résultat) on écrivant $2\cos\alpha = \exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)$ etc... en faisant le produit et en développant.

Sinon on peut aussi écrire $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha = -2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)$ et par ailleurs $\cos 2\beta + \cos 2\gamma = 2\cos((2\beta+2\gamma)/2)\cos((2\beta-2\gamma)/2) = -2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$ donc en additionnant il vient $-2\cos\alpha$ fois $2\cos\beta\cos\gamma$ d'où le résultat. Mais bref, si on n'avait pas su à l'avance la formule finale, je ne sais pas si on aurait facilement mis en place ces calculs... □

On peut alors poursuivre par la loi des cosinus

$$\mathrm{T} = -4\mathrm{R}^2\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{4\mathrm{R}^2\mathrm{X}}{8a^2b^2c^2} \tag{22}$$

et la loi des sinus

$$2\mathrm{R} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \tag{23}$$

pour obtenir le Théorème 2, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{T} = -\frac{\mathrm{X}}{32\mathcal{A}^2}}$.

6. Poursuite des calculs

On peut poursuivre (19) d'une manière analogue à ce qui était apparu dans notre calcul de ΩG^2, mais ici H joue le rôle de Ω :

$$9\|\overrightarrow{HG}\|^2 = \|\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'}\|^2 \tag{24}$$

$$= 4R^2 + 4R^2 + 4R^2 + 2(\overrightarrow{HA'} \cdot \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{HC'} + \overrightarrow{HC'} \cdot \overrightarrow{HA'}) \tag{25}$$

$$= 12R^2 + 2(4T - 4R^2) = 8T + 4R^2 \tag{26}$$

Donc

$$T = \frac{1}{2}(\frac{9}{4}\|\overrightarrow{HG}\|^2 - R^2) \tag{27}$$

et par le théorème d'Euler on sait que $HG = \frac{2}{3}H\Omega$ et l'on retrouve

$$T = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{\Omega H}\|^2 - R^2) \tag{28}$$

sans avoir utilisé de propriété supplémentaire du point H.

Cette méthode montre que T est la moitié de la puissance de H par rapport au cercle circonscrit, en traitant symétriquement les points A, B, C (à la seule exception du point de départ $T = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$).

Elle est donc satisfaisante mais pas du point de vue de trouver la forme factorisée du Théorème 2 plus directement.

Par ailleurs on a aussi

$$9\|\overrightarrow{HG}\|^2 = \|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\|^2 \tag{29}$$

$$9HG^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 + 2T + 2T + 2T \tag{30}$$

$$9HG^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 + \frac{6}{8}(9HG^2 - 4R^2) \tag{31}$$

$$\frac{9}{4}HG^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 - 3R^2 \tag{32}$$

$$H\Omega^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 - 3R^2 \tag{33}$$

La formule $T = \frac{9HG^2 - HA^2 - HB^2 - HC^2}{6}$ est aussi une expression symétrique rapidement obtenue... mais loin du Théorème 2.

On peut essayer

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = \|\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA}\|^2 + \|\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB}\|^2 + \|\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}\|^2 \tag{34}$$

$$= 3HG^2 + 2\overrightarrow{HG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \tag{35}$$

$$= 3HG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \tag{36}$$

D'où aussi

$$T = GH^2 - \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{6} \tag{37}$$

et comme l'on sait que c'est aussi $\frac{9}{8}GH^2 - \frac{1}{2}R^2$ on obtient

$$GH^2 = 4\left(R^2 - \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3}\right) \tag{38}$$

et on commencer à mouliner un peu à vide... faisons un dernier ajout. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, donc $9GA^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$ (règle des parallélogrammes), et par conséquent

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \tag{39}$$

Puis

$$\mathrm{T} = \mathrm{GH}^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{18} = 4\mathrm{G}\Omega^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{18} \tag{40}$$

que nous pouvons comparer à notre formule du Théorème 9

$$\mathrm{T} = 4\mathrm{R}^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \tag{41}$$

pour obtenir

Théorème 11. *La puissance de l'isobarycentre par rapport au cercle circonscrit est*

$$\Omega\mathrm{G}^2 - \mathrm{R}^2 = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9} \tag{42}$$

L'isobarycentre est donc toujours à l'intérieur du cercle circonscrit, le contraire nous eût étonné !

Très probablement ce dernier théorème admet une approche rapide simple mais comme je suis maintenant un peu fatigué, j'arrête là, d'autant plus que ce n'est pas toujours amusant de redécouvrir les théorèmes de siècles lointains.

Ah mais en fait on déjà fait (voir l'équation (13) et les précédentes) le calcul direct de $\Omega\mathrm{G}^2$ (qui est très simple) et on sait donc depuis belle lurette que cela vaut $\mathrm{R}^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$... j'avais prévenu qu'on tournait en rond à la fin !

Et pas d'une façon nous rapprochant du Théorème 2.