PARAMÉTRISATION PAR LA (VARIATION ABSOLUE DE LA) DIRECTION DE DÉPLACEMENT

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

1. Courbes paramétrées : la courbure

Nous considérons une courbe paramétrée $\mathrm{P}(t)$, de vecteur vitesse partout non nul $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$, la dépendance en t étant laissée implicite. Nous utiliserons le symbole $'$ pour la dérivée par rapport au paramètre originel t et un point $\dot{}$ pour la dérivée par rapport à une reparamétrisation, le contexte devant être clair pour préciser laquelle.

Soit $v = \|\vec{v}\| > 0$ le module du vecteur vitesse et $\vec{\imath} = \vec{v}/v$ le vecteur tangent unitaire et $\vec{\jmath}$ son rotationné par $\pi/2$ dans le sens direct.

Soit R un nombre réel et $\mathrm{C} = \mathrm{P} + \mathrm{R}\vec{\jmath}$ et $x^2 + (y - \mathrm{R})^2 = \mathrm{R}^2$ l'équation dans le repère $(\mathrm{P}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du cercle de centre C et de rayon $|\mathrm{R}|$. On a fixé $t = t_0$, donc $x(t_0 + h) = vh + \dots$, $y(t_0 + h) = a_2\frac{h^2}{2} + \dots$ où l'on a noté a_2 la composante normale de l'accélération ($\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath}$). Ce qui donne

$$x^2 + (y - \mathrm{R})^2 = x^2 + y^2 - 2\mathrm{R}y + \mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^2 + v^2h^2 - \mathrm{R}a_2h^2 + \dots$$

Il y a une valeur unique de R qui annule le terme en h^2, c'est

$$\boxed{\frac{v^2}{a_2}}$$

C'est une valeur algébrique, mais nous préférons sa valeur absolue pour laquelle nous réserverons la lettre R dorénavant et que nous appellerons le « rayon de courbure ». Par contre nous conservons le signe dans la « courbure » ainsi définie :

$$\boxed{k = \frac{a_2}{v^2}}$$

Bien sûr le rayon de courbure peut être infini auquel cas aucun cercle osculateur n'existe, mais la tangente est osculatrice à sa place.

Pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{w}$ nous notons $\vec{u} \times \vec{w}$ le déterminant de leurs coordonnées. Ainsi $a_2 = \vec{\imath} \times \vec{a} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{v}$ et la courbure algébrique est $(\vec{v} \times \vec{a})/v^3$.

Par ailleurs $\vec{v} = v\vec{\imath}$, donc $\vec{a} = v'\vec{\imath} + v\vec{\imath}\,'$. Or $\vec{\imath}$ étant de module constant est perpendiculaire à sa dérivée, donc $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath}$ avec $a_1 = v'$ et $\vec{\imath}\,' = \frac{a_2}{v}\vec{\jmath}$. La dérivée de $\vec{\jmath}$ est perpendiculaire à $\vec{\jmath}$ donc proportionnelle à $\vec{\imath}$ et comme par dérivation de $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$ on a $\vec{\imath}\,' \cdot \vec{\jmath} + \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}\,' = 0$ on obtient les relations :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} &= +vk\vec{\jmath} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} &= -vk\vec{\imath} \end{aligned}}$$

Date: Jeudi 28 février 2019.

2. Invariance par reparamétrisation

Une reparamétrisation $t = t(u)$ modifie les vecteurs vitesses et accélérations. Notons avec des majuscules ceux en le nouveau paramètre u. Ainsi :

$$\vec{V} = \frac{d}{du}P = \dot{t}(u)\vec{v}$$
$$\vec{A} = \frac{d^2}{du^2}P = \ddot{t}(u)\vec{v} + \dot{t}(u)^2\vec{a}$$

Nous obtenons $\vec{V} \times \vec{A} = \dot{t}(u)^3\, \vec{v} \times \vec{a}$, puis

$$\frac{\vec{V} \times \vec{A}}{V^3} = \pm\frac{\vec{v} \times \vec{a}}{v^3}$$

suivant le signe de $\dot{t}(u)$. Donc *la courbure est un invariant de reparamétrisation au signe près*, et *le rayon de courbure est invariant par reparamétrisation*.

En fait, il est logique lorsque l'on parle de courbure de l'associer à des courbes orientées. Dans ce cas seules les reparamétrisations à $u'(t)$ positif sont licites car elles respectent l'orientation de la courbe. Et la courbure algébrique est alors invariante. Ou encore si l'on regarde le support de la courbe, on ne peut définir de courbure algébrique en un point qu'en faisant un choix de sens de parcours, donc cette notion de courbure algébrique n'est pas uniquement liée au support de la courbe.

3. Paramétrisation par la longueur d'arc

On a $V = |\dot{t}(u)|v$ qui vaut 1 si l'on impose $\dot{t}(u) = v^{-1}$, ou plus simplement $u'(t) = v(t)$, soit $u = u_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$. On dit que l'on a reparamétré par la longueur d'arc. Prenons donc la lettre traditionnelle s pour ce nouveau paramètre, de sorte que $ds = v\,dt$.

Le module de la vitesse $\vec{V}$ étant constamment $V = 1$, le vecteur accélération $\vec{A}$ est réduit à sa composante normale $A_2\vec{\jmath}$, qui vaut $V^2k = k$. Ainsi, lorsque la courbe est parcourue à vitesse constante *l'accélération est en module égale à (la valeur absolue) de la courbure, à un facteur constant près* (qui vaut 1 pour une vitesse unité). De plus le repére mobile évolue alors suivant une équation différentielle ne dépendant que de la courbure (ici encore on a fixé la vitesse à l'unité, pour utiliser l'élément d'arc ds) :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{ds}\vec{\imath} &= +k(s)\vec{\jmath} \\ \frac{d}{ds}\vec{\jmath} &= -k(s)\vec{\imath} \end{aligned}}$$

4. Paramétrisation par la direction de déplacement

Dans les zones où la courbure ne change pas de signe, la composante normale de l'accélération non plus et le vecteur vitesse tourne toujours dans le même sens : sa direction peut donc servir de paramètre !

Il nous faut un nombre réel nous prenons donc une détermination continue de l'angle θ fait par $\vec{v}$ avec une direction fixe. Localement on peut toujours écrire par exemple :

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{Arcsin}\frac{\vec{v} \times \vec{v}_0}{vv_0}$$

Donc θ a la dérivabilité de $\vec{v}$; ce qui veut dire que nous imposons maintenant que la courbe soit trois fois dérivable en t pour qu'elle soit au moins deux fois dérivable en θ et que l'on puisse parler d'accélération en ce nouveau paramètre. C'est surtout la vitesse qui nous intéresse, mais on fera l'accélération à titre d'exercice.

Par définition, nous aurons

$$\vec{\imath}(\theta) = \frac{\vec{V}(\theta)}{V(\theta)} = \cos(\theta - \theta_0)\vec{\imath}_0 + \sin(\theta - \theta_0)\vec{\jmath}_0$$

Et donc, par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ on a :

$$\vec{\jmath}(\theta) = -\sin(\theta - \theta_0)\vec{\imath}_0 + \cos(\theta - \theta_0)\vec{\jmath}_0$$

En dérivant par rapport à θ il vient

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\vec{\imath} &= +\vec{\jmath} \\ \frac{d}{d\theta}\vec{\jmath} &= -\vec{\imath} \end{aligned}}$$

et comme il est bien connu ce système différentiel à coefficients constants s'intègre uniquement par les formules précédentes pour $\vec{\imath}(\theta)$ et $\vec{\jmath}(\theta)$.

Mais si l'on compare avec les formules générales fondamentales pour l'évolution du repère mobile nous voyons que cela est exactement équivalent à postuler

$$\boxed{V(\theta)k(\theta) = 1}$$

c'est-à-dire que *le module de la vitesse est partout égal au rayon de courbure* et que la courbure est toujours strictement positive.

Hmm ? ? c'est louche cette restriction à une courbure positive ! Ah mais attention lorsque la courbure en la variable originelle est négative, l'angle θ décroît. Or dans les re-paramétrisations on demande toujours d'habitude que le paramètre croisse ; et notre formule différentielle pour le repère mobile repose sur cette hypothèse.

Tentative de clarification. Imaginons une courbe qui présente des points d'inflexions et des courbures positives puis négatives. On suit la variation de la direction du vecteur vitesse : aïe à l'approche du point d'inflexion la vitesse devient infinie (puisque la courbure s'annule), premier problème ; puis la direction du vecteur vitesse se met à reprendre des valeurs prises avant, donc on n'a plus une bonne paramétrisation. Il faut bien sûr si θ_0 est l'angle de la tangente au point d'inflexion avec une direction fixe ne plus ensuite utiliser θ, mais plutôt $2\theta_0 - \theta$ comme paramètre.

> Le véritable paramètre est la varation absolue totale de la direction du vecteur vitesse.

Mais alors la formule n'est plus

$$\vec{\imath}(\theta_0 + \phi) = \cos(\phi)\vec{\imath}_0 + \sin(\phi)\vec{\jmath}_0$$

en le bon paramètre $\theta_0 + \phi$, $\phi \geqslant 0$, puisque ϕ est notre ancien $\theta_0 - \theta$, pas $\theta - \theta_0$. La bonne formule est

$$\vec{\imath}(\theta_0 + \phi) = \cos(\phi)\vec{\imath}_0 - \sin(\phi)\vec{\jmath}_0$$

Dans ce bon paramètre la vitesse angulaire du vecteur vitesse n'est plus $+1$ mais -1. On voit que la paramétrisation est singulière car on est passé brusquement de $+1$ à -1. Et la bonne formule est

$$V(\Theta)k(\Theta) = \pm 1$$

en le bon paramètre Θ qui est l'intégrale de $|d\theta|$. Il y a des segments successifs qui sont alternativement à signes $+1$ et -1. Ou, plus succinctement :

$$\boxed{V(\Theta) = R(\Theta)}$$

Et là on est content d'avoir dit que R était toujours positif (ou infini positif ; le rayon de courbure ne peut pas être nul en un point régulier, puisque la courbure n'est jamais infinie en un tel point).

Pour ce paramètre Θ qui varie toujours dans le même sens que la longueur d'arc (c'est-à-dire, s'accroît toujours), la courbure $k(\Theta)$ a le même signe que la courbure calculée dans la paramétrisation par la longueur d'arc.

Notez bien qu'il y a une ambiguïté dans la paramétrisation par la longueur d'arc par rapport au support géométrique de la courbe car on peut toujours la parcourir dans l'autre sens. Ici, nous synchronisons et parcourons la courbe dans le même sens que ce soit pour la longueur d'arc ou par Θ.

Maintenant que tout est clair (si si), faisons quelques remarques simples.

La composante normale de l'accélération est $A_2 = V^2 k = \pm V$: elle est toujours égale au signe près au module de la vitesse !

Nous voyons que les assertions suivantes sont équivalentes sur des segments à courbure de signe constant :

(1) la vitesse est partout égale au rayon de courbure,

(2) la composante normale de l'accélération est partout égale à la vitesse,

(3) la composante normale de l'accélération est partout égale au rayon de courbure,

(4) la direction de la vitesse tourne a une vitesse constante de $+1\,\mathrm{rad/s}$ ou $-1\,\mathrm{rad/s}$.

Au final on peut comparer :

(1) paramétrisation par longueur d'arc : l'accélération est normale et a partout un module égal à **l'inverse** du rayon de courbure,

(2) paramétrisation par variation totale de la direction : l'accélération normale a partout **un module égal au rayon de courbure**.

C'est tellement remarquable qu'on se demande pourquoi on parle si peu de la seconde paramétrisation en comparaison de la première !

5. Expression intégrale ou différentielle du nouveau paramètre

Le système fondamental

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{\imath} &= +vk\vec{\jmath} \\ \frac{d}{dt}\vec{\jmath} &= -vk\vec{\imath} \end{aligned}$$

s'intègre de manière unique en

$$\vec{\imath}(t) = \cos\Big(\int_{t_0}^{t} v(t)k(t)\,dt\Big)\vec{\imath}_0 + \sin\Big(\int_{t_0}^{t} v(t)k(t)\,dt\Big)\vec{\jmath}_0$$

mais nous devons faire attention que notre paramètre n'est pas la variation algébrique de la direction de déplacement, mais la variation absolue. Donc il faut utiliser

$$\Theta = \Theta_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)|k(t)|\,dt$$

ce qui équivaut à

$$\boxed{d\Theta = \frac{v(t)}{\mathrm{R}(t)}\mathrm{d}t}$$

Et en particulier si l'on utilise la longueur d'arc on aura $\Delta\Theta = \int_{s_0}^{s} |k(s)|\mathrm{d}s$. Pour une courbe fermée de courbure ayant un signe constant, cette quantité prise sur la toute la longueur de la courbe est donc un multiple entier de 2π : cet entier est l'indice par rapport à l'origine de la courbe tracée dans le plan complexe par le vecteur vitesse, si l'on considère ce dernier comme un nombre complexe.

Il faut faire attention qu'en cas de points d'inflexions, nous ne pouvons plus exprimer analytiquement la direction du vecteur vitesse en fonction de $\cos\Theta$ et $\sin\Theta$ car nous ne savons absolument pas quand il faut compter les $d\Theta$ positivement et quand négativement sur l'intervalle de longueur $\Delta\Theta$ considéré. On ne peut le faire que localement sur des intervalles où la courbure conserve un signe constant et où l'on connaît la direction pour un point donné.

6. Un calcul de l'accélération

Notons donc $\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{\mathrm{A}}$ vitesse et accélération dans notre paramétrisation. On se place sur un intervalle sans changement de signe de la courbure. Posons $\epsilon = \pm 1$ suivant le signe de la courbure. Cela veut donc dire que $\mathrm{d}\Theta = \epsilon \mathrm{d}\theta$ avec θ un relèvement continu de la direction du vecteur vitesse.

On sait que $\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_1\vec{\imath} + \mathrm{A}_2\vec{\jmath}$ avec d'une part $\mathrm{A}_1 = \dot{\mathrm{V}}$ (formule générale) et d'autre part $\mathrm{A}_2 = \mathrm{V}^2 k = \epsilon \mathrm{V}^2/\mathrm{R}$ (formule générale, encore).

Mais nous avons simplement $\mathrm{V} = \mathrm{R}$, donc $\mathrm{A}_1 = \dot{\mathrm{R}}$ et $\mathrm{A}_2 = \epsilon\mathrm{R}$. Cette dernière quantité nous pouvons la considérer connue en fonction du paramètre originel t (c'est $1/k(t) = v^2/a_2$) et il est naturel d'écrire le vecteur accélération inconnu sous la forme

$$\vec{\mathrm{A}} = \epsilon\mathrm{R}(\epsilon\frac{1}{\mathrm{R}}\dot{\mathrm{R}}\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

Le problème est donc de calculer la dérivée logarithmique

$$\epsilon\frac{1}{\mathrm{R}}\dot{\mathrm{R}} = \epsilon\frac{1}{\mathrm{R}}\mathrm{R}'\frac{dt}{d\Theta}$$

Or a vu que $\frac{d\Theta}{dt} = \epsilon k v = v/\mathrm{R}$, et on obtient

$$\vec{\mathrm{A}} = \epsilon\mathrm{R}\Big(\epsilon\frac{\mathrm{R}}{v}\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\Big) = \epsilon\mathrm{R}\Big(\frac{\epsilon\mathrm{R}}{v}\frac{\epsilon\mathrm{R}'}{\epsilon\mathrm{R}}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\Big) = \epsilon\mathrm{R}\Big(-\frac{\epsilon\mathrm{R}}{v}\frac{k'}{k}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\Big)$$

Or $k = a_2/v^2 = (\vec{v} \times \vec{a})/v^3$ a comme dérivée logarithmique, en notant $\vec{b} = \vec{a}\,'$:

$$\frac{\vec{v} \times \vec{b}}{\vec{v} \times \vec{a}} - 3\frac{v'}{v} = \frac{\vec{v} \times \vec{b}}{\vec{v} \times \vec{a}} - 3\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$\vec{\mathrm{A}} = \epsilon\mathrm{R}\bigg(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \times \vec{a}}\Big(3\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} - \frac{\vec{v} \times \vec{b}}{\vec{v} \times \vec{a}}\Big)\vec{\imath} + \vec{\jmath}\bigg)$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{A}} = \epsilon\mathrm{R}\bigg(\frac{3(\vec{v} \cdot \vec{a})(\vec{v} \times \vec{a}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{v} \times \vec{b})}{(\vec{v} \times \vec{a})^2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\bigg)}$$

Bon finalement, je préfère mon premier calcul que j'avais, je me souviens maintenant, laissé sous la forme :

$$\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{R}(\frac{\mathrm{R}}{v}\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\vec{\imath} + \epsilon\vec{\jmath}) = \mathrm{R}\bigg(\frac{\mathrm{R}}{v}\Big(3\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} - \frac{\vec{v} \times \vec{b}}{\vec{v} \times \vec{a}}\Big)\vec{\imath} + \epsilon\vec{\jmath}\bigg)$$

Je rappelle que $\vec{b} = \vec{a}\,'$. La formule est un peu compliquée mais est apparue dans un contexte où l'on voulait vraiment la calculer numériquement. Sinon, la forme théorique

$$\vec{A} = \frac{RR'}{v}\vec{\imath} + \epsilon R\vec{\jmath} = R\frac{R'}{v}\vec{\imath} + \epsilon R\vec{\jmath}$$

est peut-être plus simple à mémoriser. Il est en effet remarquable que l'on doive obtenir le même résultat pour n'importe quelle paramétrisation initiale (de même orientation), donc la quantité R'/v est nécessairement un invariant de reparamétrisation. Ce qui est évident si l'on écrit cette quantité sous la forme $dR/\|\overrightarrow{dP}\|$... (c'est la dérivée du rayon de courbure par rapport à la longueur d'arc). Donc on aurait aussi bien pu se contenter de

$$\vec{A} = R\frac{dR}{ds}\vec{\imath} + \epsilon R\vec{\jmath}$$

mais dans la pratique il faut des formules plus directement concrètes. Sauf si bien sûr il se trouve qu'on connaisse le rayon de courbure comme fonction de la longueur d'arc et qu'on connaisse aussi cette dernière !

7. Choisir des points pour des représentations graphiques

Tout ce texte a pour origine la question de choisir des points de manière parcimonieuse pour faire des tracés de courbes. On se place dans un contexte d'un logiciel qui sait « interpoler » par des courbes de Bézier suivant des points donnés. En général on utilise un pas constant pour le paramètre, mais il est naturel de se dire qu'on va utiliser plus de points là où ça tourne et moins là où c'est rectiligne.

Schéma : un instant T, comment choisir le suivant $T + \Delta T$?

J'ai pris un petit paramètre η et choisi ΔT de sorte que ΔP soit à peu près ηR : vu du centre de courbure on a tourné de α avec $\eta \approx 2\sin(\alpha/2) \approx \alpha$. D'où le choix $\Delta T = \eta R/v$ (et le fait que le vecteur vitesse a tourné d'environ $\alpha \approx \eta$). Mais nous disposons maintenant de la formule

$$\frac{dt}{d\Theta} = \frac{R}{v}$$

donc il est clair (bien que je ne rédige pas les détails) que si l'on peaufine à l'infini en prenant non pas $\Delta T = \eta R/v$, non pas la version raffinée $\Delta T = \frac{\eta}{2}(\frac{R}{v} + \frac{R_1}{v_1})$, ni même $\frac{\eta}{N}\left(\frac{R}{v} + \cdots + \frac{R_{N-1}}{v_{N-1}}\right)$ avec les points P_0^N, P_1^N, ..., P_{N-1}^N obtenus pour des paramètres T_0^N, T_1^N, ..., T_{N-1}^N où chacun découle du précédent par un $\Delta T = \frac{1}{N}\eta\frac{R}{v}$ au point considéré, mais sa *limite* lorsque $N \to \infty$, on aura un ΔT ultime, optimal, et ce sera celui qui fait $\Delta\Theta = \eta$, ce qui signifie exactement que les points que nous obtenons sont une approximation de ce qui se passerait si l'on paramétrisait la courbe pour que le vecteur vitesse tourne à $\pm\eta$ rad/s. Autrement dit les points choisis sont ceux dont les paramètres Θ forment une progression arithmétique de pas η.

Ce qui montre au final que η est une vitesse angulaire.