UN EXERCICE D'ÉLIMINATION (4e PARTIE)

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Exercice 1. *Trouver une relation polynomiale entre les coordonnées de la courbe paramétrée* $(\dfrac{t^3}{t^2+1}, \dfrac{t^2}{t^5+1})$ *(t, réel ou complexe, n'annulant pas les dénominateurs ; on continue de parler de courbe pour les points complexes).*

Solution possible. Le couple (x, y) étant donné il faut qu'il existe t avec

$$t^3 - xt^2 - x = 0$$
$$yt^5 - t^2 + y = 0$$

On utilise la « matrice de Sylvester » $\mathcal{S}'$ (transposée de la matrice plus usuellement utilisée dans les textes modernes) :

$$\mathcal{S}' = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 0 & -x \\ y & 0 & 0 & -1 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & -1 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 & -1 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Si (x, y) est sur la courbe, et est obtenu pour la valeur t du paramètre, alors la matrice n'est pas inversible puisque le vecteur de coordonnées $(t^7, t^6, t^5, t^4, t^3, t^2, t^1, t^0)$ est dans son noyau. Donc il est nécessaire que le déterminant de $\mathcal{S}'$ s'annule, ce qui donne une condition polynomiale.

```
> with(LinearAlgebra):
> M:=Matrix([[1,-x,0,-x,0,0,0,0],[0,1,-x\
> ,0,-x,0,0,0],[0,0,1,-x,0,-x,0,0],[0,0,\
> 0,1,-x,0,-x,0],[0,0,0,0,1,-x,0,-x],[y,\
> 0,0,-1,0,y,0,0],[0,y,0,0,-1,0,y,0],[0,0,y,0,0,-1,0,y]]):
> R:=Determinant(M):
> sort(R);
   5  3      5  2      4  3    5          4  2      3  3      3  2      3
2 x  y  + 2 x  y  - 5 x  y  + x  y - 3 x  y  + 5 x  y  + 7 x  y  + 3 x  y

        2  2      2      3    2
     - x  y  - 2 x  y + y  - x

> simplify(subs(x=t^3/(1+t^2), y=t^2/(1+t^5), R));
                                        0
```

On a donc obtenu la relation (de « degré » 8)

$$2x^5y^3+2x^5y^2-5x^4y^3+x^5y-3x^4y^2+5x^3y^3+7x^3y^2+3x^3y-x^2y^2-2x^2y+y^3-x^2 = 0$$

$\square$

Date: 9 février 2019.

Exercice 2. *Trouver une relation polynomiale entre les coordonnées de la courbe paramétrée* $(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1})$.

Solution possible (!) $xt^2 - 2t + x = 0$, $(y-1)t^2 + y + 1 = 0$,

$$0 = \begin{vmatrix} x & -2 & x & 0 \\ 0 & x & -2 & x \\ y-1 & 0 & y+1 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & y+1 \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2-1)$$

On aurait pu anticiper ! □

Exercice 3. *Trouver une relation polynomiale entre les coordonnées de la courbe paramétrée* $(\frac{2t}{t^2-1}, \frac{t^2+1}{t^2-1})$.

Solution possible (!) $xt^2 - 2t - x = 0$, $(y-1)t^2 - y - 1 = 0$,

$$0 = \begin{vmatrix} x & -2 & -x & 0 \\ 0 & x & -2 & -x \\ y-1 & 0 & -y-1 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & -y-1 \end{vmatrix} = 4(x^2-y^2+1)$$

On aurait pu anticiper l'hyperbole ! □

Exercice 4. *Trouver une relation polynomiale entre les coordonnées de la courbe paramétrée* $(\frac{2t}{t^2-a}, \frac{t^2+a}{t^2-a})$. *Discuter suivant les valeurs de* a.

Solution possible (!) $xt^2 - 2t - ax = 0$, $(y-1)t^2 - ay - a = 0$,

$$0 = \begin{vmatrix} x & -2 & -ax & 0 \\ 0 & x & -2 & -ax \\ y-1 & 0 & -ay-a & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & -ay-a \end{vmatrix} = 4a(ax^2-y^2+1)$$

Pour $a = 0$ on n'obtient rien, la courbe paramétrée est alors $(2/t, 1)$, donc c'est la droite $y = 1$ (privée du point $(0,1)$ que l'on n'obtient que pour $t = \infty$). Sinon on obtient $ax^2 - y^2 + 1 = 0$ qui pour a réel négatif est une ellipse (un cercle pour $a = -1$) et pour a réel positif une hyperbole d'asymptotes $y = \pm\sqrt{a}x$ et de sommets en $x = 0$, $y = \pm 1$. Remarquez que t réel paramétrise les deux branches de l'hyperbole, celle avec $y > 0$ pour $t^2 > a$, l'autre pour $0 \leqslant t^2 < a$, cependant la branche du-dessus a son sommet obtenu pour $t = \pm\infty$ seulement, tandis que la branche du-dessous est paramétrée continûment par $-\sqrt{a} < t < +\sqrt{a}$ (de $x = +\infty$ vers $x = -\infty$).

En fait il faudrait ajouter deux points à l'infini (correspondant aux asymptotes) et lorsque l'on parcourt la branche du dessous de la droite vers la gauche on passe par un point à l'infini au bout de l'asymptote à gauche en bas puis on revient sur la branche du dessus tangentiellement à l'autre côté de cette même asymptote, pour descendre par la droite vers le sommet atteint seulement en $t = +\infty$, puis on continue à partir de $t = -\infty$ pour parcourir le reste de cette branche du dessus, passer par l'autre point à l'infini et revenir sur la branche du dessous.

Si l'on revient au cas $a = 0$ on voit qu'en regardant $ax^2 - y^2 + 1$ on obtient non plus une, mais deux droites : $y = 1$ et $y = -1$. Les ellipses pour $a < 0$ sont de plus en plus allongées pour $a \to 0^-$, conservant les sommets $(0, +1)$ et $(0, -1)$ et à la limite donnent ces deux droites. On ne voit pas la deuxième droite si l'on fait $a = 0$ directement dans la paramétrisation ! □

Évidemment ces exercices n'ont absolument pas besoin de Sylvester mais je devais compléter cette page 2.