UN EXERCICE D'ÉLIMINATION (2e PARTIE)

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Dans le texte précédent nous avons trouvé une relation $R(x, y) = 0$ nécessaire pour que le point $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ soit sur la « courbe » paramétrée $\boxed{x = t^5 + t^3 + 1}$, $\boxed{y = t^5 - t^4 + 2}$.

Nous allons faire par une méthode différente. Soit $\mathcal{A}$ l'anneau commutatif $\mathbb{C}[X, Y]$ et considérons les deux polynômes P et Q suivants dans $\mathcal{A}[T]$:

$$P = T^5 + T^3 + 1 - X$$
$$Q = T^5 - T^4 + 2 - Y$$

En 1840, Sylvester associe à deux polynômes de degrés p et q une matrice (ou plutôt un déterminant ; la théorie des matrices est venue après celle des déterminants ! et d'ailleurs une matrice était initialement vue comme une sorte de « conteneur » de tous ses déterminants mineurs) de taille $p + q$. Je la noterai $\mathcal{S}'$, puisque dans de nombreux textes modernes on part plutôt de sa transposée (que je n'écrirai pas ici), que l'on pourra noter $\mathcal{S}$. Donc $\mathcal{S}'$ commence par q (= degré de Q) lignes déterminées par P, puis termine par p (= degré de P) lignes déterminées par Q. Dans le cas qui nous occupe il s'agit donc d'une matrice de taille 10×10.

Bon, on y va. Le résultant R est le déterminant de $\mathcal{S}'$.

$$R = \det \mathcal{S}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-X \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2-Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2-Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2-Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2-Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2-Y \end{vmatrix}$$

Maintenant calculons l'effet du morphisme ϕ' de matrice $\mathcal{S}'$ sur le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (donc le vecteur est la colonne transposée) :

$$(T^9, T^8, \dots, T, 1)$$

On obtient :

$$\phi'(\vec{v}) = (PT^4, PT^3, PT^2, PT, P, QT^4, QT^3, QT^2, QT, Q)$$

Spécialisons maintenant X en x, Y en y de sorte que le déterminant de la matrice $\mathcal{S}'$ devient l'évaluation $R(x, y)$. Si le couple $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$x = t^5 + t^3 + 1$$
$$y = t^5 - t^4 + 2$$

Date: 4 février 2019.

alors le vecteur non nul $\vec{v}_{T\leftarrow t}$ est dans le noyau de la matrice $\mathcal{S}'_{X\leftarrow x,Y\leftarrow y}$, et par conséquent :

$$\boxed{R(x,y)=0}$$

Calcul par Maple :

```
> with(LinearAlgebra):
> M:=Matrix([[1,0,1,0,0,1-X,0,0,0,0],[0,\
> 1,0,1,0,0,1-X,0,0,0],[0,0,1,0,1,0,0,1-\
> X,0,0],[0,0,0,1,0,1,0,0,1-X,0],[0,0,0,\
> 0,1,0,1,0,0,1-X],[1,-1,0,0,0,2-Y,0,0,0\
> ,0],[0,1,-1,0,0,0,2-Y,0,0,0],[0,0,1,-1\
> ,0,0,0,2-Y,0,0],[0,0,0,1,-1,0,0,0,2-Y,0],[0,0,0,0,1,-1,0,0,0,2-Y]]);
                    [1 ,  0 , 1 , 0 , 0 , 1 - X , 0 , 0 , 0 , 0]
                    [                                          ]
                    [0 ,  1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 - X , 0 , 0 , 0]
                    [                                          ]
                    [0 ,  0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 - X , 0 , 0]
                    [                                          ]
                    [0 ,  0 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 - X , 0]
                    [                                          ]
                    [0 ,  0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 - X]
               M := [                                          ]
                    [1 , -1 , 0 , 0 , 0 , 2 - Y , 0 , 0 , 0 , 0]
                    [                                          ]
                    [0 , 1 , -1 , 0 , 0 , 0 , 2 - Y , 0 , 0 , 0]
                    [                                          ]
                    [0 , 0 , 1 , -1 , 0 , 0 , 0 , 2 - Y , 0 , 0]
                    [                                          ]
                    [0 , 0 , 0 , 1 , -1 , 0 , 0 , 0 , 2 - Y , 0]
                    [                                          ]
                    [0 , 0 , 0 , 0 , 1 , -1 , 0 , 0 , 0 , 2 - Y]

> R:=sort(Determinant(M));
       5       4          3  2       2  3        4    5      4       3
R := X  - 5 X  Y + 10 X  Y  - 10 X  Y  + 5 X Y  - Y  + 3 X  - 26 X  Y

          2  2         3      4       3       2          2      3     2
     + 38 X  Y  - 19 X Y  + 3 Y  + 30 X  - 44 X  Y + 8 X Y  + 3 Y  - 6 X

                    2
     + 38 X Y - 12 Y  - 23 X - 3 Y + 11

> expand(subs(X=t^5+t^3+1, Y=t^5-t^4+2, R));
                                           0
```

C'est, au signe près, exactement le polynôme trouvé dans

`http://jf.burnol.free.fr/agreg190203elimination.pdf`

Pourquoi ?

Ma question est rendue un peu plus compliquée par le fait dans la fiche précédente j'ai utilisé un intermédiaire $z=x-y$ pour manipuler des matrices plus petites 4×4 et pas 5×5, donc si cela peut faciliter votre tâche, contentez vous d'interpréter la fiche précédente comme disant de considérer la matrice compagnon B du polynôme t^5-t^4+2-y (de taille 5×5) et de calculer le polynôme caractéristique suivant :

$$R(x,y)=\det(x1_5-(B^5+B^3+1_5))$$