UN EXERCICE D'ÉLIMINATION

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

On pose le premier exercice suivant : on considère la courbe paramétrée $(t^3 - 1, t^5 + 1)$. Trouver une équation polynomiale $P(x, y) = 0$, avec $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ non nul, qui soit vérifiée par les points de la courbe.

Il s'agit donc d'éliminer t entre $x = t^3 - 1$ et $y = t^5 - 1$. Clairement une réponse du type

$$y = (\sqrt[3]{x+1})^5 - 1$$

moralement résout le problème mais sans du tout le résoudre (pas polynomial, et quelle racine cubique ?). Mais on peut tout simplement ici faire $(y+1)^3 = t^{15} = (x+1)^5$ et donc ça marche avec $P(X, Y) = -(X+1)^5 + (Y+1)^3$.

Essayons donc plus difficile, on va prendre $x = t^5 + t + 1$, $y = t^5 - t + 1$. Bon, $y = x - 2t$, donc $t = (x-y)/2$ et on injecte donc $x = (x-y)^5/32 + (x-y)/2 + 1$ fonctionne. C'était encore assez facile.

Maintenant $\boxed{x = t^5 + t^3 + 1}$, $\boxed{y = t^5 - t^4 + 2}$. Comme $x - y$ est de degré 4 en t, on pourrait imaginer utiliser la résolubilité par radicaux et espérer quelque chose comme ce qu'on a fait pour se débarrasser de la racine cubique. Mais on peut s'inquiéter de la difficulté des calculs et puis clairement ce n'est pas assez général, ça ne marcherait pas avec des degrés supérieurs. Néanmoins pour simplifier je pose $z = x - y = t^4 + t^3 - 1$. L'idée que je vais présenter maintenant est très simple : on remplace t par la matrice compagnon T du polynôme $t^4 + t^3 + (-1 - z)$ (on travaille sur le corps des fractions $\mathbb{C}(z)$ de $\mathbb{C}[z]$). Au sens matriciel on a $T^4 + T^3 + (-1 - z)\,\mathrm{Id}_4 = 0_4$. On considère maintenant la matrice $X = T^5 + T^3 + \mathrm{Id}_4$ qui est une matrice 4×4 à coefficient dans $\mathbb{C}(z)$ (même $\mathbb{C}[z]$). Cette matrice vérifie par le théorème de Cayley-Hamilton une équation $X^4 + a(z)X^3 + b(z)X^2 + c(z)X + d(z) = 0_4$ avec des coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ (et même en fait $\mathbb{C}[z]$, puisqu'on les obtient à partir d'un calcul de polynôme caractéristique). Le polynôme $R(x, y) = x^4 + a(x-y)x^3 + b(x-y)x^2 + c(x-y)x + d(x-y)$ va fonctionner.

Plutôt que de le justifier j'ai fait les calculs. C'est faisable à la main au moins au début...(on note comment les colonnes se décalent vers la gauche, ce sont les vecteurs d'une récurrence linéaire)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+z & -1-z \\ 0 & 0 & 0 & 1+z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1+z & -1-z & 1+z \\ 0 & 0 & 1+z & -1-z \\ 0 & 0 & 0 & 1+z \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^4 = \begin{pmatrix} 1+z & -1-z & 1+z & -1-z \\ 0 & 1+z & -1-z & 1+z \\ 0 & 0 & 1+z & -1-z \\ -1 & 1 & -1 & 2+z \end{pmatrix}$$

$$T^5 = \begin{pmatrix} -1-z & 1+z & -1-z & 2+3z+z^2 \\ 1+z & -1-z & 1+z & -1-z \\ 0 & 1+z & -1-z & 1+z \\ 1 & -1 & 2+z & -3-2z \end{pmatrix}$$

Date: 3 février 2019.

d'où maintenant

$$X = T^5 + T^3 + \mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} -z & 2+2z & -2-2z & 3+4z+z^2 \\ 1+z & -z & 2+2z & -2-2z \\ 0 & 1+z & -z & 2+2z \\ 2 & -2 & 3+z & -3-2z \end{pmatrix}$$

Bon, pour le déterminant, j'ai fait faire par Maple (j'utilise $\det(X - u\,\mathrm{Id}_4)$ uniquement pour éviter d'avoir à reécrire X avec tous les signes opposés, de toute façon ici taille 4×4, $(-1)^4 = 1$) :

$$\det(X - u\,\mathrm{Id}_4) = \begin{vmatrix} -z-u & 2+2z & -2-2z & 3+4z+z^2 \\ 1+z & -z-u & 2+2z & -2-2z \\ 0 & 1+z & -z-u & 2+2z \\ 2 & -2 & 3+z & -3-2z-u \end{vmatrix}$$

$$= u^4+(5z+3)u^3+(-20-19z+z^2)u^2+(14z-7z^3-17z^2+26)u-11-3z-z^5+3z^3-3z^4+12z^2$$

Finalement j'utilise à nouveau Maple pour substituer $u = x, z = x - y$ dans le polynôme à deux variables ci-dessus, développer et regrouper par homogénéité :

$$\begin{aligned} R(x,y) = &-x^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5 - 3x^4 + 26x^3y - 38x^2y^2 + 19xy^3 - 3y^4 \\ &- 30x^3 + 44x^2y - 8xy^2 - 3y^3 + 6x^2 - 38xy + 12y^2 + 23x + 3y - 11 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $R(t^5 + t^3 + 1, t^5 - t^4 + 2)$ est identiquement nul ! Bien sûr je vous fais ça à la main avant même d'avoir bu mon café du matin, mais bon exceptionnellement je demande à Maple à nouveau :

```
> expand(subs(x=t^5+t^3+1,subs(y=t^5-t^4+2,R)));
                                     0
```

Ça marche !

POURQUOI ?

On peut aussi faire avec des résultants, ce qui est probablement équivalent à la méthode précédente, à vous de réfléchir.