POLYGONES RÉGULIERS ET RATIONALITÉ

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

1. Polygones réguliers

Théorème 1. *Un polygone régulier qui a trois sommets à coordonnées rationnelles possède un nombre N de côtés qui est un multiple de 4 et a exactement quatre sommets rationnels, et ceux-ci forment les sommets d'un carré.*

Théorème 2. *Un polygone régulier avec N côtés, de centre l'origine, et qui possède au moins deux sommets à coordonnées rationnelles, a soit exactement 4 sommets rationnels (formant les sommets d'un carré), soit exactement 2 sommets rationnels (opposés). Le premier cas exige que N soit multiple de 4, le deuxième que N soit congru à 2 modulo 4. Dans les deux cas N est pair.*

Corollaire 1. *Un polygone régulier avec un nombre impair de côtés, de centre l'origine, ou plus généralement un point rationnel, possède au plus 1 sommet rationnel ; si son centre n'est pas rationnel, il possède au plus 2 sommets rationnels.*

Preuve du Théorème 1. Soit A, B, C, trois sommets distincts à coordonnées rationnelles. Les médiatrices des segments AB et AC s'intersectent en le centre O du cercle ciconscrit. Ces médiatrices ont des équations rationnelles, donc le point O est rationnel. Quitte à translater on peut supposer que O est l'origine des coordonnées. Parmi A, B, C on peut en choisir deux qui ne sont pas mutuellement symétriques dans l'origine. On est ramené au premier cas du Théorème 2. □

Preuve du Théorème 2. Considérons les affixes complexes z_A et z_B de deux sommets à coordonnées rationnelles. Ainsi z_A et z_B sont dans le corps $\mathbb{Q}[i]$ et par conséquent aussi leur rapport $\omega = z_B/z_A \neq 1$.

Supposons tout d'abord que $\omega \neq -1$. Alors ω est de la forme $\exp(2\pi ik/N)$ avec $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ (distinct de la moitié de N, si N est pair). De plus $\cos(2\pi k/N)$ et $\sin(2\pi k/N)$ sont tous les deux rationnels. D'après le théorème suivant, soit $\omega = \pm 1$ ce qui est exclu, soit $\omega = \pm i$, d'où l'on déduit que N est multiple de 4. Quitte à remplacer B par son symétrique dans l'origine on peut alors supposer $z_B = iz_A$. Supposons qu'il existe à part A, B, $-A$, $-B$ un cinquième sommet rationnel C d'affixe z_C. Le raisonnement avec C à la place de B mène à $z_C = \pm iz_A$, contradiction.

Traitons maintenant le cas $\omega = -1$. Donc N est pair en tout cas. Tout sommet rationnel C autre que A et $-A$ aura $z_C = \pm iz_A$ par le raisonnement fait dans le paragraphe précédent, et N sera alors multiple de 4, et réciproquement. Donc soit on n'a que les 2 points rationnels A et $-A$ (et donc N, pair, est congru à 2 modulo 4), soit on a exactement 4 points rationnels formant un carré et possédant $[A, -A]$ comme diagonale. □

Preuve du Corollaire 1. Laissée au lecteur. □

Date: 30 janvier 2019.

2. Théorème dit de Niven

Théorème 3. *Soit q un nombre rationnel.*

1. *Si $\cos(\pi q)$ est rationnel alors il vaut 0 ou $\pm\frac{1}{2}$ ou ± 1, autrement dit $6q$ est un nombre entier qui n'est pas congru à 1 ou 5 modulo 6. Ou de manière équivalente soit $q + \frac{1}{2}$ soit $3q$ est entier, et réciproquement.*
2. *Si $\sin(\pi q)$ est rationnel alors il vaut 0 ou $\pm\frac{1}{2}$ ou ± 1, autrement dit $6q$ est un nombre entier qui n'est pas congru à 2 ou 4. Ou de manière équivalente soit q soit $3q + \frac{1}{2}$ est un entier.*

En corollaire : si à la fois $\cos(\pi q)$ et $\sin(\pi q)$ sont rationnels, alors soit q est un entier, auquel cas $\exp(\pi i q) = \pm 1$, soit $q + \frac{1}{2}$ est un entier, auquel cas $\exp(\pi i q) = \pm i$. Les seules racines de l'unité rationnelles sont donc les racines quatrièmes de l'unité.

Preuve. La transformation $q = \frac{1}{2} - q'$ ramène l'énoncé sur les sinus à celui sur les cosinus. Pour ce dernier, il peut s'exprimer en disant que si $2\cos(\pi q)$ est rationnel alors il est entier. Toute personne ayant un peu de culture sait qu'il y a une notion de « nombre complexe entier algébrique » et un théorème de base (qui généralise l'irrationalité de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$, …) qui dit que tout nombre complexe entier algébrique rationnel est un nombre entier relatif. Et $2\cos(\pi q)$ est la somme des deux entiers algébriques $\omega = \exp(\pi i q)$ et $\omega^{-1} = \overline{\omega} = \exp(-\pi i q)$, donc est un entier algébrique.

Mais on va faire, par gentillesse, directement. Supposons que $\cos(\pi q)$ est rationnel et écrivons $2\cos(\pi q)$ sous forme irréductible A/B. Posons comme plus haut $\omega = \exp(\pi i q)$, ainsi $\omega + \omega^{-1} = A/B$.

$$\omega^2 = \frac{A}{B}\omega - 1 \tag{1}$$

Si $\omega \neq \pm 1$ alors $(1, \omega)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Écrivons la matrice M de multiplication par ω, dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{A}{B} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Donc BM est une matrice entière qui modulo B est congrue à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(0, A)$. Comme A est premier avec B, aucune de ses puissances ne peut s'annuler modulo B. SAUF SI $B = 1$. Car $B = 1$ est l'unique entier positif pour lequel existent des entiers A premiers avec lui et aussi divisibles par lui.

Donc, si $B > 1$, aucune puissance $(BM)^k$ n'est jamais congrue modulo B à la matrice nulle. Donc, si $B > 1$, aucune puissance M^k, $k \geqslant 1$, n'est jamais la matrice identité. Donc aucune puissance ω^k, $k \geqslant 1$ n'est jamais égale au nombre complexe 1. Donc, si $B > 1$, ω n'est pas de la forme $\exp(\pi i q)$ avec q un nombre rationnel.

Ainsi $B = 1$ et $2\cos(\pi q) \in \mathbb{Z}$, c.q.f.d.

Ce qui termine toutes nos démonstrations (modulo des détails triviaux de justification des corrélats énoncés). □