RACINES DE POLYNÔMES COMPLEXES (PREMIERS PAS)

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Lemme 1. *Soit P un polynôme* non identiquement nul *et z_0 une racine. Soit $\eta > 0$.*

Il existe $\epsilon > 0$ tel que si Q est un polynôme tel que la norme sup de $|P - Q|$ sur le disque de centre z_0 et de rayon $\eta > 0$ est au plus ϵ alors Q possède au moins une racine z_1 avec $|z_1 - z_0| < \eta$ (ou est le polynôme identiquement nul).

Preuve. Les zéros de P sont en nombre fini, donc isolés et il existe $0 < \eta_1 < \eta$ tel que P ne s'annule pas sur le cercle de centre z_0 et de rayon η_1. Soit $c > 0$ le minimum de $|P(z)|$ sur ce cercle. Soit $\epsilon = c/3 > 0$.

Si Q vérifie l'hypothèse (norme sup de l'écart à P sur le disque de rayon η est au plus ϵ) alors $|Q(z)| \geqslant c - c/3 = 2\epsilon$ sur le cercle.

Supposons (par l'absurde) que Q ne s'annule pas dans le disque ouvert centré en z_0 de rayon η_1. Soit alors δ le minimum de $|Q(z)|$ sur le disque fermé, minimum qui est atteint en (au moins) un z_2. Ainsi $\delta > 0$, supposons $\delta < 2\epsilon$, donc z_2 est dans le disque ouvert.

Le polynôme Q ne peut pas être constant (sinon $\delta < 2\epsilon \leqslant \delta$), donc on a D.L.

$$Q(z_2 + h) = Q(z_2)(1 + wh^d + \mathcal{O}(h^{d+1}))$$

avec $w \neq 0$ et d un entier au moins 1. On écrit $w = |w|e^{i\theta}$ et on utilise la formule pour $h = te^{i(\pi-\theta)/d}$, $t > 0$ réel, de sorte qu'alors

$$Q(z_2 + h) = Q(z_2)(1 - |w|t^d + \mathcal{O}(t^{d+1}))$$

est de module strictement inférieur à $|Q(z_2)| = \delta$ pour tout $t > 0$ suffisamment petit, contradiction.

Donc z_2 est sur le bord, pas à l'intérieur, et par conséquent le minimum δ sur le disque est $\geqslant 2\epsilon$. En particulier $|Q(z_0)| \geqslant 2\epsilon$, mais comme $P(z_0) = 0$ ceci contredit l'hypothèse sur la norme sup de l'écart à P.

La conclusion est que Q s'annule sur le disque ouvert $D(z_0, \eta_1) \subset D(z_0, \eta)$. □

Il est intéressant et utile d'extraire de la preuve ci-dessus un énoncé quantitatif :

Lemme 2. *Soit P un polynôme complexe qui ne s'annule pas sur le bord d'un carré de côté $2R$, $R > 0$. Soit $c > 0$ le minimum de $|P(z)|$ sur le bord du carré. Soit Q un polynôme tel que $|P(z) - Q(z)| \leqslant \frac{1}{3}c$ sur le carré. Si P possède une racine dans le carré alors Q aussi.*

Preuve. On fait le même raisonnement, l'ancien (petit) disque $D(z_0, \eta_1)$ étant devenu le (peut-être) grand carré de rayon $2R$: si Q ne s'annule pas à l'intérieur, alors la « propriété du minimum » lui impose de vérifier $|Q(z)| \geqslant \frac{2}{3}c$ sur tout le carré puisque c'est vrai sur le bord. Donc P ne peut pas s'annuler puisque $|P(z) - Q(z)| \leqslant \frac{1}{3}c$ sur tout le carré. Par contraposée on obtient que si P s'annule, alors Q (qui ne peut pas être identiquement nul) aussi. □

J'ai utilisé des carrés plutôt que des disques par souci de variété, mais bien sûr l'énoncé précédent est valable avec « carré de côté $2R$ » remplacé par « disque de diamètre $2R$ ». On peut immédiatement en déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Date: 17 janvier 2019.

Théorème 1 (D'ALEMBERT-GAUSS). *Tout polynôme complexe Q non constant possède une racine complexe.*

Preuve. Soit $d > 0$ le degré de Q. Sans perte de généralité, on peut supposer Q unitaire. On pose $P(z) = z^d$, donc il existe une constante C (la somme des modules des coefficients non-dominants de Q) telle que :

$$\forall z \quad |P(z) - Q(z)| \leqslant C \max(|z|, 1)^{d-1}$$

Soit maintenant $R \geqslant 1$ suffisamment grand pour que $R^d \geqslant 3CR^{d-1}$ soit vrai, c'est-à-dire avec $R \geqslant \max(1, 3C)$. Nous pouvons alors appliquer le lemme précédent (avec le disque de rayon R, pas le carré), puisque

$$\sup_{|z|\leqslant R} |P(z) - Q(z)| \leqslant CR^{d-1} \leqslant \frac{1}{3}R^d = \frac{1}{3} \min_{|z|=R} |P(z)| \,.$$

Comme z^d s'annule dans le disque ouvert (je rappelle que $d > 0$), P y possède une racine, et par conséquent aussi Q. $\square$

On va maintenant améliorer un peu : par quasiment la même preuve que celle pour les minima locaux, on prouve que $|P(z)|$ pour un polynôme non constant ne peut avoir aucun maxima local, donc le maximum sur un compact est toujours atteint en au moins un point du bord (et jamais à l'intérieur sauf si P est constant). Donc le Lemme 2 peut se formuler en demandant simplement que $|P(z)-Q(z)| \leqslant \frac{1}{3}c$ sur le *bord* du carré, ou du disque. Et le facteur $\frac{1}{3}$ peut être remplacé par n'importe quel $a > 0$ vérifiant $ac < (1-a)c$, c'est-à-dire $a < \frac{1}{2}$. En effet $\|P - Q\|_\infty \leqslant ac \implies |Q(z)| \geqslant (1-a)c$ sur le bord donc à l'intérieur si Q ne s'annule pas ; si P s'annule en un z_0, on obtient alors $ac \geqslant |P(z_0)-Q(z_0)| \geqslant (1-a)c$, contradiction. Je rappelle que $c = \inf_{\text{bord}} |P(z)|$.

On peut montrer un énoncé (nettement) plus fort, faisant partie du *Théorème de* ROUCHÉ de la théorie des fonctions de la variable complexe :

Proposition 1. *Soit P et Q deux polynômes. On suppose*

$$|P(z) - Q(z)| < |P(z)| + |Q(z)|$$

en tout point du bord d'un disque de rayon $R > 0$ (ou d'un carré de côté $2R$). Alors, le nombre des racines (comptées avec leur multiplicités) à l'intérieur du disque (ou du carré) est le même pour P et pour Q.

Remarquez que l'énoncé est symétrique en P et Q et est beaucoup plus fort que ce qu'on a fait jusqu'à présent. Par ailleurs on a toujours

$$|P(z) - Q(z)| \leqslant |P(z)| + |Q(z)|$$

avec égalité si et seulement si 0 est sur le segment $[P(z), Q(z)]$. L'hypothèse faite est donc que pour tout z du bord, le segment $[P(z), Q(z)]$ ne rencontre pas l'origine, autrement dit :

$$\forall t \in [0, 1] \quad tP + (1-t)Q \qquad \text{ne s'annule pas sur le bord.}$$

Et cette hypothèse implique qu'on peut passer continûment de P à Q sans jamais s'annuler sur le bord.

C'est là le point clé, la conclusion vaut aussi sous cette hypothèse beaucoup plus faible : si P a une racine à l'intérieur et qu'on peut passer continûment de P à Q sans jamais s'annuler sur le bord, alors la racine ne peut pas disparaître, elle ne peut pas se volatiliser par enchantement ! Donc Q aussi aura une racine à l'intérieur. Et vice versa. C'est ce qu'il nous faut montrer, déjà.

En symboles : si P a une racine z_0 à l'intérieur et qu'il existe une déformation continue P_t, $P_0 = P$, $P_1 = Q$ avec P_t ne s'annulant jamais sur le bord, alors il existe une fonction continue z_t avec $P_t(z_t) = 0$ pour tout t, et z_t bien sûr toujours à l'intérieur.

Bon, ben en fait j'ai pas trop envie de me lancer là-dedans là maintenant, il y a une difficulté technique en cas de racines multiples. Le jeu est de n'utiliser aucun outil des fonctions de la variable complexe. Mais j'ai Transformers à voir en dvd, donc je laisse.