REMARQUES SUR L'EXPONENTIELLE DE MATRICE, IV

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $V = \mathrm{Mat}_d(\mathbb{K})$. On s'intéresse à l'exponentielle de matrice $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$. On ajoute un complément à
`http://jf.burnol.free.fr/agreg181207exponentielledematrice.pdf`
`http://jf.burnol.free.fr/agreg181207exponentielledematriceII.pdf`
`http://jf.burnol.free.fr/agreg181207exponentielledematriceIII.pdf`
Attention que maintenant j'utilise la lettre d ($V = \mathrm{Mat}_d(\mathbb{K})$) alors que dans les fiches précédentes j'avais $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ce qui m'a causé plein de problèmes car on a souvent envie d'utiliser n dans des sommes ou séries.

Bon, aujourd'hui nous continuons le programme bateau en nous intéressant à l'image (globale) de l'exponentielle. Et on va faire un bateau amélioré. Je ne prétends pas fournir les preuves les plus simples, mais je poursuis dans la logique de certains aspects précédemment vus, déjà.

1. L'image (globale) de l'exponentielle dans le cas complexe

Bien sûr toute matrice A de la forme $\exp(B)$ est inversible puisque $A\exp(-B) = 1_d$.

Théorème 1. *Toute matrice inversible A est de la forme $\exp(B)$ avec un B qui est de la forme $P(A)$, $P \in \mathbb{C}[X]$.*

Attention que l'énoncé ne prétend pas que B est unique (ajouter $2\pi i$ à P), et il ne prétend pas non plus que toute B avec $\exp(B) = A$ est un polynôme en A.

Preuve. Soit π_A le polynôme minimal unitaire de A, de degré p, et λ_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ ses racines, de multiplicités m_j. (On peut aussi travailler avec le polynôme caractéristique ou n'importe quel polynôme annulateur). L'espace vectoriel $E = \mathbb{C}[X]_{<p}$ est de dimension p, et l'application qui à un polynôme $P \in E$ associe le p-uplet de ses valeurs et dérivées aux λ_j jusqu'à l'ordre $m_j - 1$ inclus est injectif, puisque tout élément du noyau est divisible par π_A. Il s'agit donc d'une bijection, et en particulier il existe un unique $P \in E$ vérifiant $P(\lambda_j) = w_j$, et $P^{(i)}(\lambda_j) = (-1)^{i-1}(i-1)!/z_j^i$ pour $1 \leqslant i < m_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, avec w_1, w_2, …, w_k choisis arbitrairement tels que $\exp(w_j) = \lambda_j$ pour chaque j. Autrement dit P a la même valeur et les mêmes dérivées en chaque λ_j qu'une détermination (locale) du logarithme complexe.

Bien sûr les λ_j sont tous non nuls, donc il existe de tels w_j. Nous allons montrer que $B \coloneqq P(A)$ convient.

Soit par ailleurs $Q = \prod_j (X - w_j)^{m_j}$. On constate que $Q(P(X)) = \prod_j (P(X) - P(\lambda_j))^{m_j}$ est divisible par $\pi_A = \prod_j (X - \lambda_j)^{m_j}$, donc $Q(B) = Q(P(A)) = 0_d$.

Ainsi Q est un polynôme annulateur de B et pour obtenir $\exp(B)$ nous savons par nos études précédentes que $\exp(B) = T(B)$ avec entre autres T le polynôme de degré $< p$ vérifiant les conditions d'interpolation $T^{(j)}(w_j) = e^{w_j}$, pour $0 \leqslant j < m_j$.

Ainsi $\exp(B) = T(P(A))$ pour ce P et ce T. Soit $U(X) = T(P(X))$. On a certainement $U(\lambda_j) = T(P(\lambda_j)) = T(w_j) = e^{w_j} = \lambda_j$. Et, si λ_j a de la multiplicité, $U'(\lambda_j) = T'(w_j)P'(\lambda_j) = e^{w_j}/\lambda_j = 1$ et si λ_j a au moins multiplicité 3, $U''(\lambda_j) = T''(w_j)P'(\lambda_j)^2 + T'(w_j)P''(\lambda_j) = e^{w_j}/\lambda_j^2 - e^{w_j}/\lambda_j^2 = 0$.

Date: 21 décembre 2018, avec addendum le 23 décembre.

Plus généralement, par les régles de composition des développements limités, $T(P(X))$ a en chaque λ_j les mêmes valeurs et dérivées jusqu'à l'ordre $m_j - 1$ inclus que la fonction composée $\exp(\ln z)$, où $\ln z$ désigne un choix (dépendant de z_j) d'une branche locale du logarithme complexe. Or cette fonction composée c'est (pour chaque j) la fonction z. Donc les deux polynômes $T(P(X))$ et X résolvent le même problème d'interpolation d'ordre p, et par conséquent la différence est un multiple de π_A. En évaluant en A on obtient $T(P(A)) - A = 0$, soit finalement $\exp(B) = A$, c.q.f.d. □

2. L'image (globale) de l'exponentielle dans le cas réel

Théorème 2. *Pour qu'une matrice réelle inversible A soit de la forme $\exp(B)$ avec B réelle de la forme $P(A)$, P réel, il est nécessaire et suffisant que A n'ait aucune valeur propre négative.*

Preuve. La condition est suffisante : nous conservons les notations de la preuve précédente en supposant maintenant que les racines du polynôme minimal π_A [1] sont énumérées de sorte que $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont réelles (donc > 0) et $\lambda_{j+1} = \overline{\lambda_j}$, $j - q \in 1 + 2\,\mathbb{N}$, $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, $m_{j+1} = m_j$, $q \in \mathbb{N}$, $p - q \in 2\,\mathbb{N}$. Nous pouvons alors choisir pour $w_1, \ldots, w_q$ les logarithmes réels des λ_j et pour w_j, $j \in q + 1 + 2\,\mathbb{N}$, le prendre avec une partie imaginaire dans $]0, \pi[$ et pour w_{j+1}, $j \in q+1+2\,\mathbb{N}$, prendre le conjugué complexe de w_j.

Montrons que le polynôme d'interpolation P utilisé dans la preuve précédente est réel. Soit $Q(z) = \overline{P(\bar{z})}$ le polynôme ayant comme coefficients les conjugués complexes de ceux de P ; donc trivialement $Q^{(i)}(z) = \overline{P^{(i)}(\bar{z})}$ en tout z complexe. Le polynôme Q et ses dérivées prennent en λ_1, ..., λ_q les mêmes valeurs réelles (par définition de P) que P et ses dérivées.

Et pour $j \in q+1+2\,\mathbb{N}$, Q et ses dérivées prennent en λ_j les conjugués complexes des valeurs prises par P et ses dérivées en $\overline{\lambda_j}$, c'est-à-dire les conjugués complexes des valeurs prises par P et ses dérivées en λ_{j+1} qui (ces dernières) sont elles mêmes par construction les conjugués complexes des valeurs prises par P et ses dérivées en λ_j. Donc au final Q et P et leurs dérivées prennent les mêmes valeurs en λ_j, pour chaque $j \in q + 1 + 2\,\mathbb{N}$, et aussi bien sûr en λ_{j+1}.

Au final par unicité $Q = P$ donc P est réel et on a terminé.

La condition est nécessaire : la matrice A est de la forme SMS^{-1} avec M (complexe) triangulaire supérieure (et S complexe), donc si $B = P(A)$ existe alors $B = SP(M)S^{-1}$ et $A = \exp(B) = S\exp(P(M))S^{-1}$ donc $\exp(P(M)) = M$ et en regardant sur la diagonale, on voit que pour toute valeur propre complexe de A on a $\lambda = e^{P(\lambda)}$. Si λ est réelle alors $P(\lambda)$ aussi et donc $\lambda > 0$, c.q.f.d. □

On arrive à l'énoncé bateau ; mais nettement renforcé grâce à quelques ressources supplémentaires que je citerai dans la preuve.

Théorème 3. *Les conditions suivantes pour A réelle* inversible *sont équivalentes :*

1. *A est l'exponentielle d'une matrice réelle,*
2. *A est le carré d'une matrice réelle,*
3. *pour tout réel négatif $x < 0$, $A - x1_d$ et toutes ses puissances ont des noyaux de dimensions paires,*
4. *A est semblable (sur $\mathbb{R}$) à une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$ avec A_1 n'ayant dans son spectre (complexe) aucune valeur propre réelle*

1. Le polynôme minimal unitaire est le même sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'on sait que ses racines sont les valeurs propres complexes de A, et que le conjugué complexe d'une racine est une racine de la même multiplicité.

négative et $A_2 = A_3$ n'ayant dans son spectre (complexe) que des valeurs propres réelles négatives.

Il est important de souligner que la connaissance des polynômes caractéristiques et minimaux de A ne suffit donc pas à elle seule à caractériser si A est dans l'image de l'exponentielle réelle : certes toutes les valeurs propres réelles négatives doivent avoir une multiplicité paire dans le polynôme caractéristique, mais cette condition est loin d'être suffisante (sauf si A est supposée diagonalisable).

Preuve. Je vais seulement démontrer l'équivalence bateau (1) $\iff$ (2), en effet je l'avais complétement oublié mais j'ai déjà rédigé tout ce qu'il faut pour montrer (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4) :

`http://jf.burnol.free.fr/agreg180629matcarrees.pdf`
`http://jf.burnol.free.fr/agreg180628jordan.pdf`

Si $A = \exp(B)$ alors $A = M^2$ avec $M = \exp(B/2)$. Donc (1) $\implies$ (2) et ne reste qu'à montrer que si $A = M^2$ est un carré alors A est une exponentielle.

Il est commode de passer au morphisme ϕ associé à A sur $\mathbb{R}^d$, qui est donc de la forme ψ^2 avec ψ le morphisme de matrice M. On sait (lemme des noyaux ou théorie des espaces caractéristiques) que $\mathbb{R}^d$ admet une décomposition en somme directe de sous-espaces stables $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q \oplus F$ avec ψ restreint à F n'ayant aucune valeur propre réelle négative, et les E_i étant les espaces caractéristiques de ψ pour ses valeurs propres réelles négatives λ_1, ..., λ_q (s'il en existe...).

Maintenant nous définissons ψ_1 comme agissant comme ψ sur F mais comme $-\psi$ sur chacun des E_i. Clairement $\phi = \psi_1^2$ et ψ_1 n'a aucune valeur propre réelle négative.

Ainsi avec M_1 la matrice de ψ_1 on a $A = M_1^2$ et M_1 n'a aucune valeur propre réelle négative donc par le théorème précédent est l'exponentielle d'une matrice réelle, donc A est l'exponentielle d'une matrice réelle. □

Addendum : l'approche plus habituelle au Théorème 1 passe par la décomposition de Dunford $A = D+N = D(1_d+D^{-1}N)$, en sachant que D et N (et aussi D^{-1}) sont des polynômes en A, et comme D est diagonalisable inversible il est assez simple de voir que $D = \exp(P(D))$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ choisi de sorte que $\exp(P(\lambda)) = \lambda$ pour toutes les valeurs propres de D, ensuite on finit en utilisant la série du logarithme $M \coloneqq D^{-1}N - (D^{-1}N)^2/2 + (D^{-1}N)^3/3 - (D^{-1}N)^4/4 \dots$ qui par nilpotence de N ne comporte qu'un nombre fini de termes et on justifie que $\exp(M) = 1_d + D^{-1}N$, puis on rassemble tous les morceaux. Mais je trouve que la preuve de Théorème 1 qui construit une solution même dans le cas non-diagonalisable par un problème d'interpolation polynomiale nous en apprend plus.

Ensuite, l'approche habituelle à (2) $\implies$ (1) n'utilise que le Théorème 1 : si $A = M^2$, et M réelle, on commence par écrire $M = \exp(P(M))$ avec P un polynôme complexe. Soit P^* le polynôme dont les coefficients sont les conjugués complexes de ceux de P. Comme M est une matrice réelle, $P^*(M)$ est la matrice conjuguée complexe de $P(M)$. Les deux commutent car ce sont chacune des polynômes en M, donc $\exp(P(M) + P^*(M)) = \exp(P(M))\exp(P^*(M))$, mais $\exp(P^*(M))$ est la matrice conjuguée complexe de $\exp(P(M)) = M$, donc est elle-aussi M et le produit est $M^2 = A$. Donc $A = \exp((P + P^*)(M)) = \exp(B)$ avec B la matrice réelle $(P + P^*)(M)$. Habituellement, je ne vois pas traitée la question de quand A peut s'écrire comme l'exponentielle d'un polynôme réel en A (Théorème 2). Comme nous on l'a fait, il était naturel de donner la preuve de (2) $\implies$ (1) dans la démonstration du Théorème 3, un peu moins simple sans doute que les arguments de ce paragraphe.

Finalement l'énoncé (3) ou d'autres éventuels permettant de concrétement décider si A est le carré d'une matrice réelle n'est jamais donné.