REMARQUES SUR L'EXPONENTIELLE DE MATRICE, III

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. On s'intéresse à l'exponentielle de matrice $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$. On ajoute un complément à
`http://jf.burnol.free.fr/agreg181207exponentielledematrice.pdf`
`http://jf.burnol.free.fr/agreg181207exponentielledematriceII.pdf`

1. Retour sur le cas complexe

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, notre formule pour Dexp_A, à savoir

$$\mathrm{Dexp}_A(H) = e^A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\,\mathrm{ad}_A)^{k-1}}{k!}(H)$$

exhibe Dexp_A comme un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire. Car il ne faut pas perdre de vue qu'a priori une différentielle Dexp_A désigne un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, donc ici il faudrait voir dans Dexp_A la même application de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même que celle donnée par la formule ci-dessus, mais considérée comme un endomorphisme du $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $2n^2$ qui est $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Il se trouve que ce morphisme est $\mathbb{C}$-linéaire, et c'est tant mieux.

Lorsque $\mathbb{C}^d$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et ϕ un $\mathbb{C}$-endomorphisme vu comme un $\mathbb{R}$-endomorphisme, que l'on notera Φ, alors le spectre (complexe... bon je sens que je vais rapidement perdre des lecteurs) de Φ est l'union du spectre de ϕ et du conjugué complexe de ce spectre (union au sens des parties finies de $\mathbb{C}$ avec multiplicités, pas union ensembliste — je n'améliore pas mon cas).

Remarquons tout d'abord que si M est la matrice de ϕ dans la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ de $\mathbb{C}^d$, alors la matrice N (réelle par définition) de Φ dans la base canonique $(e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_d, ie_d)$ est conjuguée (sur $\mathbb{C}$! sinon on resterait réel... or on est fort complexe !) à $\left(\begin{smallmatrix} M & 0_d \\ 0_d & \overline{M} \end{smallmatrix}\right)$. Vous pouvez le voir sur cette identité de matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

et plus généralement via cette identité de matrices $2d \times 2d$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_d & i1_d \\ i1_d & 1_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_d & -i1_d \\ -i1_d & 1_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$$

(en prenant $A = 1_d$ et $B = 0_d$ on voit qu'à gauche de la gauche on a l'inverse de la droite de la gauche). Et avec $A = \mathrm{Re}\, M$, $B = \mathrm{Im}\, M$, la matrice du milieu à gauche est celle de Φ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_d, ie_1, ie_2, \ldots, ie_d)$, donc est conjuguée sur $\mathbb{R}$ à N. Et on a notre énoncé.

Mieux, l'identité ci-dessus n'exige pas que A et B soient réelles, donc on peut prendre z complexe et y remplacer A par $z1_d - A$, et B par $-B$. D'où :

$$\det(z1_{2d} - \left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)) = \det(z1_d - A - iB)\det(z1_d - A + iB)$$

$$\det(z\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2d}} - \Phi) = \det(z\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^d} - \phi)\overline{\det(\overline{z}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^d} - \phi)}$$

Date: 13 décembre 2018.

Attention au $\bar{z}$, pas z, à la fin de cette dernière formule. Bref on a alors notre conclusion en ce qui concerne le spectre (complexe) de Φ (réelle).

Et aussi, en particulier, $\det \Phi = |\det \phi|^2$.

Pourquoi tous ces développements ? bien sûr car je veux m'intéresser au spectre (complexe) de la différentielle et au jacobien, c'est-à-dire le déterminant (comme $\mathbb{R}$-morphisme), et aux conditions nécessaires et suffisantes pour que ce jacobien s'annule. Modulo donc notre discussion précédente, on va traiter $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et se focaliser sur Dexp_A comme $\mathbb{K}$-morphisme.

2. Le spectre et le jacobien de la différentielle de l'exponentielle de matrice

Pour λ, μ complexes définissons $T(\lambda, \mu) = \int_0^1 e^{(1-t)\lambda + t\mu}\, dt$. De cette intégrale à paramètres λ et μ on a la continuité. Pour $\lambda = \mu$, on voit de suite que $T(\lambda, \mu) = e^\lambda = e^\mu$, sinon

$$T(\lambda, \mu) = \frac{e^\mu - e^\lambda}{\mu - \lambda}$$

Théorème 1. *Soit A de spectre (complexe) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le spectre (complexe) de Dexp_A vu comme $\mathbb{K}$-morphisme de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ est composé des n^2 nombres complexes (dont certains peuvent coïncider) $T(\lambda_i, \lambda_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Le $\mathbb{K}$-morphisme Dexp_A est inversible si et seulement il n'existe aucun couple de deux valeurs propres de A différant par un multiple entier non nul de $2\pi i$.*

Preuve. Nous allons utiliser la formule

$$\mathrm{Dexp}_A(H) = \int_0^1 e^{(1-t)A} H e^{tA}\, dt$$

et l'utiliser pour H complexe, car nous cherchons le spectre complexe de Dexp_A. L'approche est simplissime : on va trigonaliser A et en déduire une trigonalisation de Dexp_A.

Soit donc $C_1, C_2, \dots, C_n$ des colonnes $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes qui trigonalisent (sur $\mathbb{C}$) la matrice A, avec valeurs propres associées λ_j. Ainsi :

$$AC_i = \lambda_i C_i + \text{une comb. lin. des } C_k, k < i$$

Nous aurons aussi besoin de $D_1, D_2, \dots, D_n$ des colonnes $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes qui trigonalisent (sur $\mathbb{C}$) la matrice ${}^tA$, avec les valeurs propres associées λ_j dans le même ordre que précédemment (on sait que le spectre avec multiplicités est le même pour A et sa transposée).

En notant L_j la ligne transposée de la colonne D_j, on a

$$L_j A = \lambda_j L_j + \text{une comb. lin. des } L_k, k < j$$

Je dis que les n^2 matrices $C_i L_j$ forment une base : en effet toute colonne C est combinaison des C_i et toute ligne L est combinaison des L_j, donc tout produit CL est combinaison des $C_i L_j$, en particulier c'est le cas pour les matrices élémentaires E_{pq} donc pour toutes les matrices. Donc ces n^2 matrices engendrent tout, et forment une base de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

On va plus précisément les considérer dans l'ordre suivant $C_1L_1, C_2L_1, C_1L_2, C_3L_1, C_2L_2, C_1L_3, \dots, C_nL_n$, où les détails importent peu, mais la chose importante c'est que C_pL_q vient avant C_iL_j si $i + j > p + q$.

On fait la remarque que A étant trigonalisée par $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ il en est de même de $e^{(1-t)A}$ avec diagonale égale à $e^{(1-t)\lambda_1}, \dots, e^{(1-t)\lambda_n}$ (suffit de revenir à la définition comme série de $\exp((1-t)A)$). De même pour l'action par multiplication à droite par e^{tA} par rapport aux L_j.

Si l'on considère $H = C_i L_j$ et $e^{(1-t)A} H e^{tA}$ cette matrice sera exactement égale à

$$e^{(1-t)\lambda_i + t\lambda_j} C_i L_j + \text{une comb. lin. des } C_p L_q, p + q < i + j$$

donc le morphisme $H \mapsto e^{(1-t)A} H e^{tA}$ est trigonalisé par la base des $C_i L_j$ prise dans l'ordre décrit précédemment. On intègre de 0 à 1 et on en déduit que cette base des $C_i L_j$ trigonalise Dexp_A (comme $\mathbb{C}$-morphisme) et que le spectre est comme indiqué par le théorème.

Pour que $T(\lambda, \mu) = 0$ il est nécessaire et suffisant que $\mu - \lambda \in 2\pi i\, \mathbb{Z}^*$ et on a fini la preuve. □

Théorème 2. *L'application exponentielle sur $\mathbb{K}^n$ est localement un C^1-difféomorphisme au point $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire un difféomorphisme d'un certain voisinage ouvert de A avec un voisinage ouvert de $\exp(A)$) si et seulement si les différences de valeurs propres complexes de A ne sont jamais dans $2\pi i\, \mathbb{Z}^*$.*

Preuve. La condition est nécessaire : si exp est un C^1-diffémorphisme sa différentielle au point A (comme $\mathbb{R}$-morphisme) est inversible, donc le déterminant jacobien est non nul, donc par le théorème précédent les valeurs propres complexes de A ne diffèrent jamais par un multiple entier non nul de $2\pi i$.

La condition est suffisante : sous l'hypothèse le théorème précédent montre que le déterminant jacobien est non nul au point A. Le théorème d'inversion locale pour les applications C^1 permet de conclure. □

Je ne rentre pas ici dans les considérations sur l'image de l'exponentielle de matrice qui font l'objet de planches bien connues.

Mais je termine sur un exemple concret exhibant un cas de non-injectivité locale de l'exponentielle, sur les nombres réels, qui m'a été communiqué par M. Serman à l'occasion d'une discussion ayant donné naissance à ces fiches sur l'exponentielle de matrices. Posons :

$$M(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est toujours $X(X^2 + 4\pi^2)$, donc il y a trois valeurs propres complexes distinctes 0, $2\pi i$, $-2\pi i$. La matrice $M(t_1, t_2)$ est conjuguée sur $\mathbb{C}$ à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(0, 2\pi i, -2\pi i)$ donc son exponentielle est conjuguée à la matrice 1_3 donc en fait $\exp(M(t_1, t_2)) = 1_3$ indépendamment de t_1 et t_2 !

En particulier avec $A = M(0, 0)$ il passe par A un « plan » de matrices sur lequel la fonction exponentielle est constante. La différentielle Dexp_A contient dans son noyau au moins les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(pour les deux dernières en reprenant le raisonnement ci-dessus), mais la multiplicité de zéro comme racine du polynôme caractéristique est 6 par le théorème précédent, je vous laisse terminer l'étude de Dexp_A dans ce cas... (qui n'a que les seules valeurs propres 0 et 1...). La réponse mentionnera en particulier une autre famille de matrices proches de A et d'exponentielle constamment égale à l'identité (famille signalée originellement par M. Serman).