REMARQUES SUR L'EXPONENTIELLE DE MATRICE, II

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. On s'intéresse à l'exponentielle de matrice $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$. On ajoute un complément à
`http://jf.burnol.free.fr/agreg181207exponentielledematrice.pdf`

1. Différentielle de l'exponentielle de matrice, 2^e^ partie

On va obtenir la même formule

$$\mathrm{Dexp}_A(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_A)^{n-1}}{n!}(e^A H) = e^A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_A)^{n-1}}{n!}(H)$$

par une méthode complètement différente.

Soit $0 \leqslant t \leqslant 1$ et considérons la fonction

$$\phi(t) = \exp((1-t)A)\exp(t(A+H))$$

C'est une fonction C^∞ de la variable t, et on peut dériver facilement

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \exp((1-t)A)(-A)\exp(t(A+H)) + \exp((1-t)A)(A+H)\exp(t(A+H))\\ &= \exp((1-t)A)H\exp(t(A+H))\end{aligned}$$

$$e^{A+H} - e^A = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 e^{(1-t)A} H e^{t(A+H)}\,dt$$

Uniformément sur $[0,1]$, $e^{t(A+H)} = e^{tA} + \mathcal{O}(\|H\|)$, et par conséquent

$$\mathrm{Dexp}_A(H) = \int_0^1 e^{(1-t)A} H e^{tA}\,dt$$

On multiplie à gauche par e^{-A} et on obtient

$$e^{-A}\,\mathrm{Dexp}_A(H) = \int_0^1 e^{-tA} H e^{tA}\,dt$$

Et en reprenant nos notations L et R, ceci s'écrit aussi

$$e^{-A}\,\mathrm{Dexp}_A(H) = (\int_0^1 \exp(-tL)\exp(tR)\,dt)(H)$$

où l'on fait une intégrale à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}))$ (ce qui ne pose aucun problème de principe, tout étant continu en t).

À nouveau $LR = RL$ dans $\mathrm{End}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}))$, donc $\exp(-tL)\exp(tR) = \exp(-t\,\mathrm{ad}_A)$, $\mathrm{ad}_A = L - R$, $\mathrm{ad}_A(H) = [A,H] = AH - HA$ l'action de A par commutateurs. Et en repassant à la série

$$e^{-A}\,\mathrm{Dexp}_A(H) = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^1 t^n \frac{(-\mathrm{ad}_A)^n}{n!}\,dt)(H) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_A)^n}{(n+1)!})(H)$$

et encore

$$\mathrm{Dexp}_A(H) = e^A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}_A)^{n-1}}{n!}\right)(H)$$

Date: 7 décembre 2018.