Inégalités de Newton

Jean-François Burnol, 6 octobre 2018

Je pensais avoir rédigé cela par le passé mais apparemment non.

Soit x_i, pour $i = 1, 2, \ldots, n$ des nombres réels *positifs*. Soit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires des x_i. C'est-à-dire :

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \tag{1}$$

Posons $\sigma_k^* = \sigma_k / \binom{n}{k}$. Ainsi $\sigma_1^* = \frac{\sigma_1}{n}$, $\sigma_{n-1}^* = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$ et $\sigma_n^* = \sigma_n$ et les σ_j^* valent 1 lorsque tous les x_i valent 1.

Théorème 1 (Newton-Maclaurin)**.** *Il vaut (pour les fonctions symétriques normalisées de réels* positifs *quelconques) :*

$$\sigma_1^* \geqslant \sqrt{\sigma_2^*} \geqslant \sqrt[3]{\sigma_3^*} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n^{1/n} \tag{2}$$

Quelques remarques :

— Les $(\sigma_j^*)^{1/j}$ sont homogènes de degré 1 et compris entre $\min x_i$ et $\max x_i$.

— $\sigma_1^* = \sigma_1/n$ est la moyenne arithmétique et $(\sigma_n^*)^{1/n} = \sigma_n^{1/n}$ est la moyenne géométrique. J'admettrai pour la preuve qui suit du Théorème 1 l'inégalité « arithmético-géométrique » $\sigma_1/n \geqslant (\sigma_n)^{1/n}$.

— L'inégalité $(\sigma_1^*)^2 \geqslant \sigma_2^*$ peut s'obtenir en partant de $0 \leqslant \sum_i (x_i - \sigma_1^*)^2$. Je la laisse ici exercice car on n'en a pas besoin pour la preuve qui suit.

— Lorsque les x_i sont non nuls on peut écrire $\sigma_{n-1}^* = (x_1^{-1} + \cdots + x_n^{-1})\sigma_n/n$. On peut s'assurer (en élévant à la puissance $n-1$) que $(\sigma_{n-1}^*)^{1/(n-1)} \geqslant \sigma_n^{1/n}$ équivaut à

$$\sigma_n^{1/n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

c'est-à-dire à l'inégalité « géométrico-harmonique ». Il suffit de poser $y_j = x_j^{-1}$ et de passer à l'inverse dans cette équation pour voir qu'elle équivaut à l'inégalité « arithmético-géométrique ».

— Si l'un des x_i est nul alors $\sigma_n = 0$ et $(\sigma_{n-1}^*)^{1/(n-1)} \geqslant \sigma_n^{1/n}$ est vrai trivialement.

Preuve du Théorème 1. Notons $P = (X + x_1) \ldots (X + x_n) = X^n + \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + \sigma_n$. Si $n = 2$ on n'a plus rien à montrer, supposons donc $n > 2$.

Soit $0 \leqslant q \leqslant n-2$. Dérivons q fois pour obtenir le polynôme suivant de degré $n - q \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P_q = P^{(q)} = n(n-1)\ldots(n-q+1)X^{n-q} + (n-1)\ldots(n-q)\sigma_1 X^{n-q-1} \\ + \cdots + (q+1)\ldots 2 \cdot \sigma_{n-q-1} X + q!\sigma_{n-q} \end{aligned} \tag{3}$$

Admettons pour le moment que P_q se factorise sous la forme

$$P_q = c_q(X + u_1) \dots (X + u_{n-q}) \tag{4}$$

avec coefficient dominant $c_q = n(n-1)\dots(n-q+1)$ et des $u_j \geqslant 0$.

On en déduit par le cas déjà traité qui compare les deux dernières fonctions symétriques (inégalité géométrico-harmonique), ici pour P_q/c_q unitaire de degré $n-q$ que

$$\sqrt[n-q-1]{\frac{(q+1)!\sigma_{n-q-1}}{(n-q)c_q}} \geqslant \sqrt[n-q]{\frac{q!\sigma_{n-q}}{c_q}} \tag{5}$$

Et par chance pour nous, $c_q/q! = \binom{n}{q} = \binom{n}{n-q}$ tandis que $(n-q)c_q/(q+1)! = \binom{n}{q+1} = \binom{n}{n-q-1}$. Autrement dit on a obtenu

$$(\sigma^*_{n-q-1})^{\frac{1}{n-q-1}} \geqslant (\sigma^*_{n-q})^{\frac{1}{n-q}} \tag{6}$$

pour $q = 0, 1, \dots, n-2$. Ce sont les inégalités recherchées.

Reste à justifier notre assertion sur P_q. Mais P a n racines négatives $-x_1, \dots, -x_n$ (peut-être certaines coïncident). Par le lemme de Rolle (généralisé) P' a au moins $n-1$ racines réelles (comptées avec multiplicités) dans $[-\max x_i, -\min x_i]$. Ce sont donc toutes ses racines réelles ou complexes, et on peut itérer car elles sont négatives à nouveau. La p-ème dérivée aura également exactement $n-p$ racines réelles comptées avec multiplicités, sur l'axe réel négatif, d'où la factorisation (4). Ceci termine la démonstration. □

Posons aussi $\sigma_0 = \sigma^*_0 = 1$. Le Théorème 1 nous dit que la fonction $j \mapsto \frac{1}{j}\log\sigma^*_j$ décroît, or elle représente aussi le taux d'accroissement $\frac{\log\sigma^*_j - \log\sigma^*_0}{j}$. On se dit que peut-être $\log\sigma^*_j$ est une fonction **concave** de j, et c'est en effet ce que Newton a prouvé :

Théorème 2 (Newton-Maclaurin)**.** *Pour des nombres réels x_j (non-nécessairement positifs) de fonctions symétriques normalisées $\sigma^*_j = \sigma_j/\binom{n}{j}$, il vaut pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$,*

$$(\sigma^*_j)^2 \geqslant \sigma^*_{j-1}\sigma^*_{j+1} \tag{7}$$

Vérifions déjà que le Théorème 1 (qui suppose les x_j *positifs*) en découle. On va d'abord supposer les x_j strictement positifs, de sorte que $\sigma_j > 0$ pour tous les $j = 0, \dots, n$. Les inégalités de Newton prennent *dans ce cas positif* la forme

$$\frac{\sigma^*_j}{\sigma^*_{j-1}} \geqslant \frac{\sigma^*_{j+1}}{\sigma^*_j} \tag{8}$$

La quantité $\alpha_j = \frac{1}{j}\log\sigma^*_j$ est la moyenne arithmétique des j « taux d'accroissements élémentaires » $\log\sigma^*_{k+1} - \log\sigma^*_k$ pour $k = 0, 1, \dots, j-1$. Donc α_{j+1} est la moyenne barycentrique de α_j avec poids j et de $\log \sigma^*_{j+1} - \log \sigma^*_j$ avec poids 1. Or par (8) en passant aux logarithmes, les $\log \sigma^*_{k+1} - \log \sigma^*_k$ décroissent lorsque k augmente. Donc $\log \sigma^*_{j+1} - \log \sigma^*_j$ est majoré par α_j et par conséquent α_{j+1} est majoré par α_j. C'est-à-dire on a le Théorème 1 pour les $x_j > 0$. Par continuité et passage à la limite il vaut aussi si certains s'annulent.

Preuve du Théorème 2. Pour la preuve on va recycler notre idée précédente de dériver le polynôme $P = \prod_i (X + x_i)$. Cette fois-ci on va faire une récurrence sur le degré du polynôme (c'est-à-dire sur le nombre de variables). On va voir que nous n'aurons plus besoin d'admettre l'inégalité arithmético-géométrique. Et je rappelle qu'ici les x_i ne sont plus nécessairement positifs.

Commençons par le premier cas : $n = 2$, $j = 1$, il s'agit de montrer

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geqslant x_1 x_2 \ ,$$

qui est assez facile à établir. Je le laisse en exercice.

Supposons donc les inégalités de Newton vraies pour $n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$. On a

$$\begin{aligned} P &= X^n + \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1} X + \sigma_n \\ \frac{1}{n} P' &= X^{n-1} + \frac{n-1}{n} \sigma_1 X^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n} \sigma_{n-1} \end{aligned}$$

Notons (aussi pour $j = 0$) τ_j la j-ème fonction symétrique des opposés des racines de P', autrement dit le coefficient de X^{n-1-j} dans P'/n. On voit que $\tau_j = \frac{n-j}{n} \sigma_j$ et

$$\tau^*_j = \frac{(n-j)\sigma_j}{n\binom{n-1}{j}} = \frac{\sigma_j}{\binom{n}{j}} = \sigma^*_j$$

L'hypothèse de récurrence nous donne les inégalités pour $j = 1, \ldots, n-1-1 = n-2$. On a utilisé le fait que le polynôme réel P ayant n racines réelles (comptées avec multiplicités), il en résulte par le Lemme de Rolle (généralisé) que P' a $n-1$ racines réelles (comptées avec multiplicités).

Il reste encore à traiter le cas $j = n-1$ pour n variables, soit

$$(\sigma^*_{n-1})^2 \geqslant \sigma^*_{n-2} \sigma_n \ .$$

Si l'un des x_i est nul, $\sigma_n = 0$ et l'inégalité est vraie. Sinon, divisons les deux côtés par σ_n^2, on voit que l'inégalité équivaut à

$$\left(\frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{x_i}\right)^2 \geqslant \frac{1}{n(n-1)/2} \sum_{i<j} \frac{1}{x_i x_j}$$

qui n'est pas autre chose que $(\sigma_1^*)^2 \geqslant \sigma_2^*$ en les inverses $y_i = x_i^{-1}$, donc c'est le cas $j = 1$ en ces variables, qui est déjà acquis. Attention qu'ici les x_i ne sont pas supposés positifs. Mais on a divisé par σ_n^2 qui lui est positif.

Ceci complète la démonstration. □

Nous voyons que cette deuxième preuve n'a pas l'inégalité arithmético-géométrique en pré-requis, au contraire elle la redémontre puisque le Théorème 2 a le Théorème 1 comme corollaire qui lui même contient la moyenne arithmético-géométrique comme conséquence.

Le sujet semble assez fascinant et il y a sûrement bien d'autres choses à dire.

L'exemple du polynôme $X^3 + 3X^2 + \frac{16}{7}X + \frac{4}{7}$ montre que les inégalités de Newton peuvent être vérifiées sans pour autant que les racines du polynôme soient toutes réelles.

Sylvester a démontré en 1853 (voir [3] pour un exposé moderne; je n'inclus pas ici les références aux articles de Sylvester car les titres sont très longs et ses Œuvres complètes sont disponibles) qu'il existe pour chaque degré n, un nombre fini de polynômes $R_j(a_1, \ldots, a_n)$ tels que le polynôme $P = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ a toutes ses racines réelles si et seulement si les inégalités $R_j(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$ sont toutes vérifiées.

Pour $n = 2$ et $n = 3$ il est connu élémentairement qu'un seul polynôme suffit, à savoir le discriminant, donc $a_1^2 - 4a_2$ pour $n = 2$ et $D_3(1, a_1, a_2, a_3) = 18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 27a_3^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3$ pour $n = 3$. [1]

L'affirmation de Newton était que le nombre de racines *non-réelles* est **au moins égal** au nombre de changements de signes dans la suite 1, $\left(\frac{a_1}{\binom{n}{1}}\right)^2 - \frac{a_2}{\binom{n}{2}}, \ldots, \left(\frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}\right)^2 - \frac{a_n}{\binom{n}{n}}\frac{a_{n-2}}{\binom{n}{n-2}}$, a_n^2. En particulier aucun changement de signe ne peut survenir si toutes les racines sont réelles, c'est-à-dire les inégalités du théorème 2 sont valables lorsque toutes les racines sont réelles.

Si j'ai bien compris, Sylvester a validé l'affirmation générale de Newton en 1865.

Références

[1] Colin Mac Laurin, *« A second letter from Mr. Colin Mc Laurin, [. . .] to Martin Folks, Esq. ; concerning the roots of equations, with the demonstration of other rules in algebra [. . .] »*, Phil. Trans., **36** (1729), nos 407-416, p. 59-96.

[2] Isaac Newton, *Arithmetica universalis : sive de compositione et resolutione arithmetica liber* (1707).

[3] R. Benedetti et J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, Paris, 1990.

1. Le polynôme $X^3 + 3X^2 + \frac{16}{7}X + \frac{4}{7}$, qui vérifie les inégalités de Newton, s'annule en -2 et en une paire de complexes conjugués. D'ailleurs $D_3(1, 3, \frac{16}{7}, \frac{4}{7}) = -256/343 < 0$.