Théorème d'équirépartition de Weyl

Jean-François Burnol, 17 septembre 2018

Il s'agit ici simplement de fournir un corrigé de la partie

IV. Théorème de Weyl

du sujet X-ENS 2017 MP C, qui passe par une inégalité de van der Corput.[1]

L'objectif est de démontrer le

Théorème 1 (Théorème de Weyl, 1916). *Pour tout polynôme réel P de degré $d \geqslant 1$, de coefficient dominant α_d irrationnel, la suite $(P(n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo* 1.

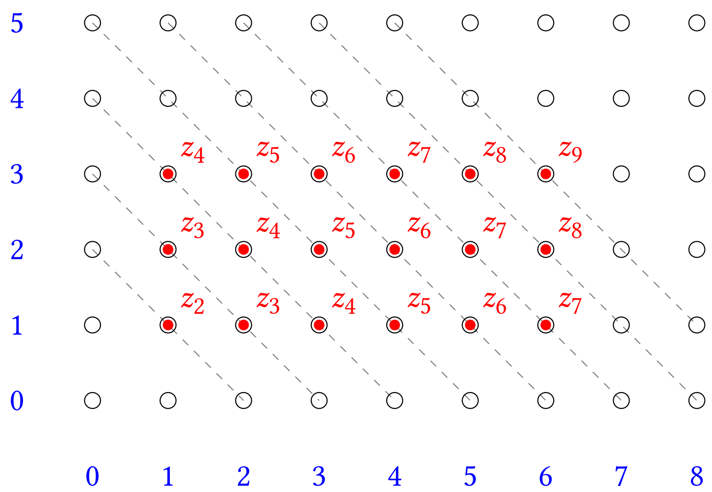
Les parties I, II, et III ont établi la caractérisation de l'équirépartition modulo 1 par le comportement asymptotique de certaines sommes exponentielles et en ont déduit le cas $d = 1$ du Théorème.

(IV.1) Inégalité de van der Corput. Soit $(z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes tels que $|z_n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Soient $1 \leqslant H \leqslant N$.

(IV.1.a) Montrer que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| \leqslant H + 1 \,.$$

Corrigé. Voici une figure illustrant le cas $H = 3$, $N = 6$. Au point (i, j) du réseau entier on associe le nombre complexe z_{i+j}.



La figure indique quelques droites à $i + j$ constant. La somme des z_{i+j} vaut dans cet exemple $z_2 + 2z_3 + 3(z_4 + \cdots + z_7) + 2z_8 + z_9$. La formule générale

1. Le corrigé que j'ai trouvé sur internet de IV.1.c est erroné, ce qui a motivé cette rédaction.

est

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h} = z_2+2z_3+\dots+(H-1)z_H+H(z_{H+1}+\dots+z_{N+1})+(H-1)z_{N+2}+\dots+z_{N+H}$$

En effet pour $2 \leqslant m \leqslant N+H$ la cardinalité de l'ensemble des couples d'entiers (n,h) avec $1 \leqslant n \leqslant N, 1 \leqslant h \leqslant H$ et $n+h=m$ est celle des entiers n avec à la fois $1 \leqslant n \leqslant N$ et $m-H \leqslant n \leqslant m-1$, soit encore

$$1+\min(N,m-1)-\max(1,m-H)$$

Les trois cas sont alors $2 \leqslant m \leqslant H$, $H+1 \leqslant m \leqslant N+1$, $N+1 \leqslant m \leqslant N+H$ et en explicitant on obtient la formule ci-dessus.

Donc, maintenant :

$$H\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h} = Hz_1+(H-1)z_2+\dots+z_H-Hz_{N+1}-(H-1)z_{N+2}-\dots-z_{N+H}$$

qui en module est majoré par

$$H+(H-1)+\dots+1+H+(H-1)+\dots+1 = H(H+1)$$

Après division par H ceci conclut la preuve. □

(IV.1.b) Montrer que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqslant \frac{1}{N^{1/2}}\frac{1}{H}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N} .$$

Corrigé. De **IV.1.a** on déduit d'abord

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqslant \frac{1}{NH}\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| + \frac{H+1}{N} ,$$

puis on utilise $|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} c_n| \leqslant \sqrt{N}(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|c_n|^2)^{1/2}$ (cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwartz), avec $c_n = \sum_{h=1}^{H} z_{n+h}$. □

(IV.1.c) En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{h,h'=1}^{H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} = \dots$$

..., montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \leqslant NH + 2H \sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+h} \overline{z_n} \right| + H^2(H+1)\ .$$

Corrigé. L'énoncé originel a une coquille car il lui manque un symbole de partie réelle $\Re$ dans la partie « ... » (omise ici) ci-dessus.

Posons $A(h,h') = \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}}$. Il s'agit donc de majorer le module complexe de $\sum_{h,h'=1}^{H} A(h,h') = \sum_{n=1}^{N} (\sum_{h=1}^{H} z_{n+h})(\sum_{h'=1}^{H} \overline{z_{n+h'}})$.

Associons aux points (i,j) du réseau entier (dans le premier quadrant) les nombres complexes $z_i\overline{z_j}$. La quantité $A(h,h')$ fait la somme de N valeurs consécutives le long d'une droite de pente 45°, de $(1+h, 1+h')$ à $(N+h, N+h')$.

Ces valeurs $A(h,h')$ sont indexées par les points entiers d'un carré de côté H. On va séparer les trois cas $h > h'$ (en dessous de la diagonale principale), $h = h'$ (sur la diagonale), $h < h'$ (au dessus de la diagonale).

Pour $h = h'$, on majore $A(h,h')$ (qui est alors réel) par $\sum_{n=1}^{N} 1 = N$. Il y a H telles contributions d'où un terme en HN.

Pour $h > h'$, on va poser $k = h - h'$. Par exemple avec $k = 1$, il y a $H-1$ contributions $A(2,1)$, $A(3,2)$, ..., $A(H, H-1)$; plus généralement il y aura $A(k+1, 1)$, ..., $A(H, H-k)$, donc $H' = H - k$ contributions, indexées par $h' = 1, \ldots, H-k$.

Posons, pour k fixé, $w_n = z_{n+k}\overline{z_n}$. Ainsi

$$A(h'+k, h') = \sum_{n=1}^{N} w_{n+h'}\ ,$$

et par conséquent

$$\sum_{h'=1}^{H'} A(h'+k, h') = \sum_{h'=1}^{H'} \sum_{n=1}^{N} w_{n+h'}\ ,$$

est précisément de la forme de la double somme dans **IV.1.a** (H' remplace H, et h' remplace h, et on a mis la somme sur h' à l'extérieur). Il est crucial ici que les w_n sont de modules au plus un, eux aussi. Nous avons par **IV.1.a** :

$$\left| H' \sum_{n=1}^{N} w_n - \sum_{h'=1}^{H'} A(h'+k, h') \right| \leqslant H'(H'+1)\ ,$$

puis

$$\left|\sum_{h'=1}^{H'} A(h'+k,h')\right| \leqslant H'\left|\sum_{n=1}^{N} w_n\right| + H'(H'+1) = H'\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\overline{z_n}\right| + H'(H'+1)\ ,$$

Dans le terme de droite nous remplaçons le premier H' par $H-1$. La contribution totale des $A(h,h')$ pour $h > h'$ s'obtient maintenant en sommant de $k=1$ à $k=H-1$, avec $H' = H-k$ allant donc de $H-1$ à 1 en décroissant (si $H=1$, il n'y a aucune contribution hors la diagonale (réduite à un point), et il faut comprendre les notations qui suivent comme donnant 0, par sommations vides). Nous obtenons :

$$\left|\sum_{1\leqslant h'<h\leqslant H} A(h,h')\right| = \left|\sum_{k=1}^{H-1}\sum_{h'=1}^{H'} A(h'+k,h')\right| \leqslant (H-1)\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\overline{z_n}\right| + \sum_{H'=1}^{H-1} H'(H'+1)\ .$$

Avec $f(x) = x(x+1)(x+2)$, on a $f(x)-f(x-1) = x(x+1)(x+2-(x-1)) = 3x(x+1)$. Donc

$$3\sum_{H'=1}^{H-1} H'(H'+1) = \sum_{H'=1}^{H-1} f(H')-f(H'-1) = f(H-1)-f(0) = (H-1)H(H+1).$$

Ainsi la somme « sous-diagonale » est majorée en module par

$$(H-1)\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\overline{z_n}\right| + \frac{1}{3}H(H^2-1)\ .$$

(Qui donne 0 pour $H=1$ ce qui est rassurant). La somme « sur-diagonale » est le conjugué complexe de la somme « sous-diagonale » (puisque passer au conjugé complexe revient à échanger h avec h'), donc son module est majoré de même. Au total (avec la contribution diagonale) nous obtenons la majoration

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 \leqslant HN + 2(H-1)\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\overline{z_n}\right| + \frac{2}{3}H(H^2-1)$$

Cette majoration est meilleure que celle de l'énoncé, donc celle de l'énoncé est également démontrée. □

(IV.1.d) En déduire que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right|\right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}\ .$$

Corrigé. On combine **IV.1.b** et **IV.1.c** :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqslant \frac{1}{N^{1/2}}\frac{1}{H}\left(NH + 2H\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| + H^2(H+1)\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}$$
$$= \left(\frac{1}{H} + 2\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right| + \frac{H+1}{N}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N},$$

et la conclusion en découle par $\sqrt{A+B+C} \leqslant \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$. □

(IV.2) Lemme de VAN DER CORPUT. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels tels que pour tout $h \geqslant 1$ la suite de nombres réels $(x_{n+h} - x_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie.

Corrigé. D'après III.4, il suffit (et il faut, III.2.b) de montrer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ non nul (ou simplement $k \in \mathbb{N}$ non nul par conjugaison complexe), que l'on a $\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} e_k(x_n) = o(1)$. Fixons donc un tel k entier relatif non nul et posons $z_n = e_k(x_n)$. Ce sont des nombres complexes de modules 1.

Il s'agit de prouver que $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n$ tend vers zéro. Or par III.2.b et l'équirépartition modulo 1 de $(x_{n+h} - x_n)_{n\geqslant 1}$ nous savons que pour tout $h \geqslant 1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n} \longrightarrow 0$$

On a utilisé : $e_k(x_{n+h} - x_n) = z_{n+h}\overline{z_n}$.

Soit $H \geqslant 1$ quelconque. Pour tout $N \geqslant H$ on a la majoration de IV.1.d. Lorsque N tend vers l'infini le terme de droite tend vers $1/\sqrt{H}$.

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Soit H au moins égal à ϵ^{-2}. Pour ce H et pour N tendant vers l'infini le terme de droite dans IV.1.d tend vers une quantité $\leqslant \epsilon$. Donc pour N suffisamment grand $(\sum_{1\leqslant n\leqslant N} z_n)/N$ est majoré en module par 2ϵ.

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire on a prouvé $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} z_n = o(N)$, c.q.f.d. □

(IV.3) Démontrer le **Théorème de WEYL** en raisonnant par récurrence sur le degré $d \geqslant 1$.

Preuve. Pour chaque $h \geqslant 1$, $P(X+h) - P(X)$ est un polynôme réel de degré $d-1$ et de terme dominant $\alpha_d dh$ qui reste irrationnel.

Si l'énoncé est vrai par hypothèse de récurrence pour le degré $d-1$ alors les suites, pour chaque h fixé, $(P(n+h) - P(n))_{n\geqslant 1}$ sont équiréparties modulo 1. Par le lemme de VAN DER CORPUT, la suite $(P(n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1.

Comme on a déjà établi l'énoncé pour $d = 1$ précédemment, on en déduit par récurrence la validité du théorème pour tous les degrés. □