Décomposition de Jordan (d'une matrice nilpotente)

Jean-François Burnol, 28 juin 2018

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On définit les blocs de Jordan :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \tag{1}$$

On remarquera que l'indice est la taille de la matrice, parfois certains utilisent le nombre de 1 dans la matrice. Je préfère la taille de la matrice qui est aussi l'indice de nilpotence : $J_k^k = 0$, mais $J_k^{k-1} \neq 0$.

Théorème 1. *Soit N une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, de taille $n \times n$ et nilpotente d'ordre k exactement.*

Alors N est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant un J_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Pour toute telle décomposition le nombre c_i des blocs J_i ne dépend que de N et de i.

Preuve. On va démontrer l'existence (pour tous les k) par récurrence sur n. L'énoncé est vrai pour $n = 1$ supposons le vrai pour tous les entiers $< n$.

Soit $V = \mathbb{K}^n$ l'espace vectoriel des colonnes, et ϕ l'endomorphisme de multiplication par N. Soit $x \in V$ tel que $\phi^{k-1}(x) \neq 0$.

Soit $f \in V^*$ une forme linéaire telle que $f(\phi^{k-1}(x)) \neq 0$. Ainsi, $(\phi^*)^{k-1}(f) \neq 0$.

On montre facilement que x, $\phi(x)$, ..., $\phi^{k-1}(x)$ sont linéairement indépendants (on va faire sous peu un raisonnement dont on peut recycler ici la technique en plus simple), soit E l'espace vectoriel qu'ils engendrent. Il est de dimension k et stable par ϕ.

De même les formes linéaires f, $\phi^*(f)$, ..., $(\phi^*)^{k-1}(f)$ sont linéairement indépendantes. Soit $F \subset E$ le lieu de leurs zéros, c'est-à-dire l'intersection des k hyperplans associés. On sait que F est de co-dimension k dans E.

F est stable par ϕ, car si $y \in F$, alors $f(\phi(y)) = (\phi^*(f))(y) = 0$, $(\phi^*(f))(\phi(y)) = (\phi^*)^2(f)(y) = 0$, ..., $((\phi^*)^{k-1}(f))(\phi(y)) = ((\phi^*)^k(f))(y) = 0$. Remarquez bien que nous utilisons pour ce dernier calcul que k est l'ordre de nilpotence de N.

Montrons que E et F sont supplémentaires. Soit y dans $E \cap F$,

$$y = a_0 x + a_1 \phi(x) + \cdots + a_{k-1}\phi^{k-1}(x)$$

On a $\phi^{k-1}(y) = a_0 \phi^{k-1}(x)$, et comme $y \in F$, il faut $f(\phi^{k-1}(y)) = 0$ donc $a_0 = 0$ puisque $f(\phi^{k-1}(x)) \neq 0$.

On recommence ensuite avec maintenant $\phi^{k-2}(y) = a_1\phi^{k-1}(x)$, et comme $y \in F$, il faut $f(\phi^{k-2}(y)) = 0$ donc $a_1 = 0$. Et ainsi de suite jusqu'à $a_{k-1} = 0$.

L'intersection est nulle et les dimensions complémentaires, les espaces E et F sont donc supplémentaires dans V.

Dans la base $(\phi^{k-1}(x), \phi^{k-2}(x), \dots, x)$ de E, la restriction de ϕ est représentée par la matrice J_k.

L'endomorphisme ϕ laisse F stable et y est nilpotent. Donc par récurrence il existe une base dans laquelle ϕ est représentée par une diagonale par blocs J_i, $i \leqslant k$.

L'existence est donc démontrée par récurrence.

Soit c_i le nombre de blocs J_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. On vérifie de suite :

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Ker} \phi &= c_1 + c_2 + \cdots + c_k \\
\dim \operatorname{Ker} \phi^2 &= c_1 + 2c_2 + 2c_3 + \cdots + 2c_k \\
\dots &= \dots \\
n = \dim \operatorname{Ker} \phi^k &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots + kc_k
\end{aligned}$$

donc, en posant pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_i = \dim \operatorname{Ker} \phi^i$ (donc $n_0 = 0$) :

$$\begin{aligned}
n_1 - n_0 &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k \\
n_2 - n_1 &= c_2 + c_3 + \cdots c_k \\
\dots &= \dots \\
n_k - n_{k-1} &= c_k
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2n_1 - (n_0 + n_2) \\
c_2 &= 2n_2 - (n_1 + n_3) \\
\dots &= \dots \\
c_k &= 2n_k - (n_{k-1} + n_{k+1})
\end{aligned}$$

avec dans la dernière equation $n_{k+1} = n_k = \dim V$.

Ce qui montre l'unicité. □

— si un vecteur x non nul n'est pas d'ordre de nilpotence maximal k pour ϕ il est faux que l'espace cyclique qu'il engendre admette nécessairement un supplémentaire stable. C'est évident avec nos résultats en considérant un unique bloc de Jordan.

— supposons $n = 3$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, avec une base (w_1, w_2, w_3) adaptée donnant un bloc J_1 et un bloc J_2 : $\phi(w_1) = \phi(w_2) = 0, \phi(w_3) = w_2$. La base $(w_1 + w_2, w_2, w_3)$ donne la même chose. La base $(w_1, w_2, w_1 + w_3)$ également. Et aussi $(w_1 + w_2, w_2, w_1 + w_3)$. Attention donc à ne pas imaginer une unicité de sous-espaces là où il n'y a que des ϕ-isomorphismes. En tout cas $\operatorname{Ker} \phi \cap \operatorname{Im} \phi = \mathbb{K} w_2$.