Un déterminant bilinéaire donnant les formules de Cramer

Jean-François Burnol, 29 mars 2018

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou en fait n'importe quel corps.

Sur $\mathbb{K}^n$ (dont les éléments sont vus commes des colonnes) on a la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ et une forme bilinéaire canonique $X \cdot Y = {}^tXY$ (la multiplication de matrices étant notée par juxtaposition).

Soit A une matrice $n \times n$, et considérons le déterminant

$$\varphi_A(W, Y) = \begin{vmatrix} A & -Y \\ {}^tW & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

1. Montrer que φ_A est une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^n$. [1]
2. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On ajoute x_1 fois la première colonne et x_2 fois la seconde et ... et x_n fois la n^e colonne à la dernière. En déduire
$$\varphi_A(W, Y) = \begin{vmatrix} A & AX - Y \\ {}^tW & W \cdot X \end{vmatrix} \tag{2}$$
3. On suppose A inversible. En utilisant l'équation précédente pour un X bien choisi, montrer
$$\varphi_A(W, Y) = \det A \, (W \cdot A^{-1}Y) \tag{3}$$
4. En utilisant (3) pour $W = e_1, e_2, \dots, e_n$ démontrer les formules de Cramer. On peut en effet alors évaluer directement (1), par une permutation de colonne.
5. Toujours pour A inversible, déduire de (3) que $(\det A)A^{-1}$ est la matrice de la forme bilinéaire φ_A dans la base canonique.
6. On revient en général. On considère (1) pour $W = e_j$ et $Y = e_i$. Développer par rapport à dernière ligne puis la dernière colonne et en déduire une formule déterminantale pour $\varphi_A(e_j, e_i)$.
7. En déduire que la matrice de φ_A dans la base canonique est la transposée de la comatrice.
8. Dans le cas A inversible, constater que l'on a ainsi démontré la formule $A^{-1} = (\det A)^{-1}\, {}^t\mathrm{comat}\, A$.

1. Certains l'appellent la burnolienne, mais c'est très abusif !