Formes quadratiques et spectres

Jean-François Burnol, 16 mars 2018

Soit V un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On utilise la notation $x \cdot y$ ou encore (x, y) pour le produit scalaire et $\|x\|$ pour la norme associée.

Soit F une forme bilinéaire symétrique sur V et φ le morphisme défini par la relation

$$\forall x, y \quad F(x, y) = x \cdot \varphi(y) \tag{1}$$

Cela signifie, en prenant pour x et y les vecteurs e_i d'une base orthonormée quelconque de V que la matrice de φ dans cette base est la matrice de Gram du système $(e_1, \dots, e_n)$ pour F.

Notons $P(t) = \det(t\,\mathrm{Id}_V - \varphi)$ le polynôme caractéristique. On sait qu'il est scindé sur $\mathbb{R}$ de racines $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$. Ce sont les valeurs propres de φ, dont la matrice est symétrique. On sait que les espaces propres pour deux valeurs propres distinctes sont mutuellement orthogonaux.

Soit maintenant $W \subset V$ un hyperplan, G la restriction de F à $W \times W$ et ψ l'endomorphisme associé à G (et au produit scalaire) sur W. Soit $Q(t) = \det(t\,\mathrm{Id}_W - \psi)$ le polynôme caractéristique de ψ.

On s'intéresse au rapport $P(t)/Q(t)$ dans le but de montrer à nouveau le théorème d'entrelacement.

Pour tout x, y de W on a $x \cdot \varphi(y) = x \cdot \psi(y)$, donc $\varphi(y) - \psi(y)$ est dans $W^\perp$ qui est une droite $\mathbb{R}z$, pour un certain $z \in V$ de norme 1 (unique au signe près). On a donc

$$\forall y \in W \quad \varphi(y) = \psi(y) + L(y)z \tag{2}$$

où L est une certaine forme linéaire sur W. Finalement cette forme linéaire se représente de manière unique comme le produit scalaire avec un certain $w \in W$ (peut-être nul), d'où la formule suivante :

$$\exists w \in W \ \ \forall y \in W \quad \varphi(y) = \psi(y) + (w \cdot y)z \qquad (V = W \perp \mathbb{R}z, \|z\| = 1) \tag{3}$$

Soit maintenant $W_0 = \{y \in W, y \perp w\}$ qui est donc soit W tout entier soit un hyperplan de W.

Nous traitons d'abord le cas $W_0 = W$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de la forme $(e_1, \dots, e_{n-1}, z)$ (donc les $n-1$ premiers vecteurs forment une B.O.N. de W). La matrice de φ dans cette base a comme mineur principal $n-1 \times n-1$ celle de ψ dans la base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de W. Comme $W_0 = W$ la dernière ligne n'a que des zéros sauf le coin en bas à droite $F(z, z)$ (peut-être), et comme la matrice est symétrique la dernière colonne aussi n'a que des zéros avant le $F(z,z)$. On a une décomposition par bloc et on trouve que $P(t) = Q(t)(t - F(z,z))$. Le spectre de φ est identique avec celui de ψ auquel on ajoute une valeur $F(z,z)$. Un petit raisonnement (laissé au lecteur) montre que les valeurs sont bien entrelacées dans ce cas spécial.

Dans le cas général où W_0 est vraiment un hyperplan, on va regarder la décomposition de W en espaces propres E_i pour les valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_d$, leur somme valant $n - 1$.

Pour chaque i, l'intersection de E_i et de W_0 est soit E_i tout entier soit un hyperplan de E_i. On renumérote les d valeurs propres distinctes μ_1, …, μ_d de ψ de sorte que pour $1 \leqslant i \leqslant I$, on a $E_i \subset W_0$ et pour $i > I$, on a un hyperplan. On prend ensuite une base orthonormée de W composée de vecteurs des E_i, $i \leqslant I$, et des E_i, $i > I$, et pour ces derniers on prend les vecteurs dans l'hyperplan, sauf un bien sûr, que l'on notera f_i. On met les f_i, $i > I$ à la fin de la base, tous les autres, mis en premiers, étant dans W_0. On complète par z pour obtenir une B.O.N. de V tout entier.

Pour fixer les idées notons donc $(e_1, \ldots, e_{n-1-k}, f_1, \ldots, f_k, z)$ les vecteurs de cette base orthonormée dont les $n - 1$ premiers vecteurs sont des vecteurs propres de ψ. Si vous suivez, vous savez que $k = d - I$. Par nos explications précédentes les e_j sont aussi des vecteurs propres de φ, par contre $\varphi(f_j) = \mu_{I+j} f_j + a_j z$ avec $a_j \neq 0$ (car $a_j = L(f_j) \neq 0$, puisque $f_j \notin W_0$).

La forme de la matrice de l'endomorphisme φ dans cette base est alors :

$$\left(\begin{array}{c|c} D & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & E \end{array}\right) \tag{4}$$

avec D une matrice diagonale et E la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu_{I+1} & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \mu_{I+2} & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & \mu_d & a_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k & F(z,z) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Il nous faut calculer le polynôme caractéristique de ce E. Pour cela dans la matrice $t\,\mathrm{Id} - E$, on ajoute $a_1/(t - \mu_{I+1})$ fois la première colonne à la dernière, $a_2/(t - \mu_{I+1})$ fois la deuxième colonne à la dernière etc… ce qui ramène à une matrice triangulaire inférieure et nous donne donc le déterminant

$$\prod_{I<i\leqslant d} (t - \mu_i) \cdot \left(t - F(z,z) - \sum_{I<i\leqslant d} \frac{a_i^2}{t - \mu_i} \right) \tag{6}$$

En assemblant nos résultats on a :

$$P(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - D) \cdot \prod_{I<i\leqslant d} (t - \mu_i) \cdot \left(t - F(z,z) - \sum_{I<i\leqslant d} \frac{a_i^2}{t - \mu_i} \right) \tag{7}$$

$$Q(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - D) \cdot \prod_{I<i\leqslant d} (t - \mu_i) \tag{8}$$

et par conséquent la fraction rationnelle $P(t)/Q(t)$ est de la forme

$$f(t) = t - F(z,z) - \sum_{I<i\leqslant d} \frac{a_i^2}{t - \mu_i} \tag{9}$$

avec des μ_i *tous distincts* et des a_i *tous non nuls*.

On voit que le cas spécial traité en premier est un cas particulier où la somme est vide, donc nulle.

On est allé vite et on a oublié de dire que si μ_i est racine de Q de multiplicité m, alors soit $i \leqslant I$ et alors μ_i est aussi racine de P de multiplicité soit m soit $m+1$ (le μ_i peut par extraordinaire annuler $f(t)$, mais alors sans multiplicité car $f'(\mu_i) > 0$), soit $I < i \leqslant d$ et μ_i est racine de P de multiplicité *exactement* $m - 1$ (en particulier, n'est pas racine de P si $m = 1$) : car il est racine simple du second facteur dans le produit et pôle simple de $f(t)$.

On suppose qu'on a numéroté de sorte que $\mu_{I+1} < \mu_{I+2} < \cdots < \mu_d$ pour fixer les idées.

Sur son domaine définition $f'(t) > 0$, donc f est strictement croissante et en regardant les limites en les μ_i on conclut par le T.V.I. que f a exactement $k + 1 = d - I + 1$ racines simples.

Les spectres de φ et ψ peuvent se décrire ainsi (dans tous les cas, y compris le cas spécial $W_0 = W$) :

1. un entier $k \geqslant 0$,
2. k nombres réels distincts formant un ensemble T,
3. $k+1$ nombres réels distincts formant un ensemble S, entrelacé strictement avec T,
4. un ensemble avec multiplicités R, d'une multiplicité totale $n - 1 - k$,
5. le spectre de φ est l'ensemble avec multiplicités $R \cup S$ et le spectre de ψ est l'ensemble avec multiplicités $R \cup T$.

Le fait que $R \cup S$ et $R \cup T$ sont entrelacés au sens large est laissé en exercice...