Minimax et formes quadratiques

Jean-François Burnol, 15 mars 2018

Soit $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit φ une forme bilinéaire symétrique, de matrice A dans la base canonique.

On sait que la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Soit $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres ordonnées par ordre croissant. On notera $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs propres de norme 1 associés. En cas de valeur propre multiple on prend les u_j associés mutuellement orthogonaux.

On s'intéresse aux restrictions de φ à des sous-espaces vectoriels $W \subset V$. En prenant une B.O.N. dans W on peut associer à φ une matrice B. Cette matrice B dépend du choix de la base, mais si l'on change de B.O.N dans W, la nouvelle matrice B' sera de la forme ${}^tPBP$ avec P une matrice *orthogonale*, donc B' est *semblable* à B et par conséquent a le même spectre $\{\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_d\}$ qui est donc canoniquement associé à la restriction de φ à l'espace euclidien W.

Théorème 1. *Soit W un hyperplan dans $V = \mathbb{R}^n$. Le spectre de la restriction de φ à W est entrelacé avec le spectre sur V, c'est-à-dire :*

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n \tag{1}$$

Pour démontrer ce théorème, j'ai choisi une méthode utilisant les formules dites du **minimax**.

Soit $E \subset V$ de dimension 2. Il a une intersection non nulle avec l'hyperplan F engendré par $u_2, \ldots, u_n$. Or clairement si $x \in F$, on a $\varphi(x,x) \geqslant \lambda_2 \|x\|^2$:

$$x = x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n \implies \varphi(x,x) = \sum_j \lambda_j |x_j|^2 \geqslant \lambda_2 \sum_j |x_j|^2 = \lambda_2 \|x\|^2 \tag{2}$$

Donc on est certain qu'il existe $x \in E$ avec $\|x\| = 1$ et $\varphi(x,x) \geqslant \lambda_2$. De sorte que l'on a prouvé :

$$\min_{\dim E = 2} \Big(\max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big) \geqslant \lambda_2 \tag{3}$$

Si l'on prend maintenant E le plan engendré par u_1 et u_2, il est clair que $\varphi(x,x) \leqslant \lambda_2 \|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Donc on a l'égalité du *minimax* :

$$\lambda_2 = \min_{\dim E = 2} \Big(\max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big) \tag{4}$$

Il est clair que

$$\lambda_1 = \min_{\dim E=1} \Big(\max_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big) = \min_{\|x\|=1} \varphi(x,x) \tag{5}$$

et vous démontrerez ensuite :

$$1 \leqslant p \leqslant n \implies \lambda_p = \min_{\dim E=p} \Big(\max_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big) \tag{6}$$

Montrons maintenant les formules complémentaires du *maximin* :

$$1 \leqslant p \leqslant n \implies \lambda_p = \max_{\operatorname{codim} E=p-1} \Big(\min_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big) \tag{7}$$

Supposons $p = 1$, la formule dit que $\lambda_1 = \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x)$. OK !

Prenons $p = 2$ et soit E de codimension 1, donc un hyperplan. Il intersecte nécessairement le plan engendré par u_1 et u_2. Soit x de norme 1 dans cette intersection. On a $\varphi(x,x) \leqslant \lambda_2$, donc le minimum sur tout E est au plus λ_2 et si on maximise sur les E on reste inférieur ou égal à λ_2. Bien sûr pour E l'hyperplan engendré par $u_2, \dots u_n$, on trouve que le minimum est λ_2 exactement. D'où l'égalité.

Les autres valeurs de p se traitent de manière semblable. Pour $p = n$, il s'agit de prendre un maximum sur les droites vectorielles, et cela redonne la formule $\lambda_n = \max_{\|x\|=1} \varphi(x,x)$.

On passe à la preuve du théorème 1.

Preuve. Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un hyperplan.

Considérons $\mu_p = \min_{\substack{\dim E=p \\ E\subset W}} \Big(\max_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big)$. Le minimum est pris sur moins d'espaces E que pour λ_p, donc $\lambda_p \leqslant \mu_p$.

On a aussi $\mu_p = \max_{\substack{\dim E=\dim W-(p-1) \\ E\subset W}} \Big(\min_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big)$. Or $\dim E = \dim W - (p-1) = n-1-p+1 = n-p$. Le maximum est pris sur moins d'espaces que dans

$$\max_{\operatorname{codim}_{\mathbb{R}^n} E=p} \Big(\min_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \varphi(x,x) \Big) = \lambda_{p+1}$$

et par conséquent $\mu_p \leqslant \lambda_{p+1}$. C.Q.F.D. (wow !) $\square$