Décimaux en hexadécimal

Jean-François Burnol, 22 février 2018

Théorème 1. *Soit* t *un nombre décimal c'est-à-dire un nombre rationnel de la forme* $a/10^x$, *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{Z}$.

Alors, la période L *de l'écriture hexadécimale de* $t = a \cdot 10^{-x}$ *est une puissance de* 5.

Preuve. Bien sûr pour un nombre entier ou plus généralement un nombre de la forme $b/2^y$ donnant un développement hexadécimal fini, on considèrera que la période L vaut 1.

On peut supposer $a \geqslant 0$ et $x > 0$.

Soit $4k$ le plus petit multiple de 4 plus grand que x, $x = 4k - h$, $h = 0, 1, 2$, ou 3. Alors

$$t = \frac{a}{10^x} = \frac{a}{16^k \cdot 2^{-h} \cdot 5^x} = 16^{-k} \frac{2^h a}{5^x}$$

Son développement hexadécimal est donc celui de $u = 2^h a/5^x$, décalé vers la droite de k chiffres, et on est ramené à u. On peut séparer la partie entière et finalement on regarde un $v = b/5^x$ avec $0 \leqslant v < 1$. Le cas nul est trivial donc on peut supposer $b > 0$, de plus en réduisant la fraction on peut supposer que 5 ne divise pas b.

L'exposant x au dénominateur ne peut pas être devenu zéro, car $0 < v < 1$.

Traitons $x = 1$, $0 < b < 5$, on a alors

$$v = \frac{b}{5} = \frac{3b}{16 - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3b}{16^k}$$

ce qui montre puisque $0 < 3b < 16 - 1$ que le développement hexadécimal a le même chiffre répété indéfiniment (chiffre qui n'est pas $15 = 16 - 1$!), donc $L = 1$.

Supposons donc $x \geqslant 2$.

Je commence par re-démontrer un fait supposé connu, à savoir que la période pour $v = b/5^x$ coïncide avec l'ordre de 16 dans le groupe multiplicatif défini par le dénominateur 5^x (qui est premier avec 16).

Soit e l'ordre de 16 dans $(\mathbb{Z}/5^x\mathbb{Z})^*$, de sorte que $16^e - 1 = N \cdot 5^x$ pour un certain $N > 0$ et alors

$$v = \frac{b}{5^x} = \frac{Nb}{16^e - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Nb}{16^{ek}}$$

donne le développement en base 16^e de période 1 ($0 < Nb < 16^e - 1$) et un développement en base 16 de période au plus e.

La vraie période L peut-elle être plus courte ? On aura $v = (c + \frac{M}{16^L - 1}) \cdot 16^{-z}$ avec z le nombre de chiffres avant la première période, et c un nombre entier $< 16^z$, et $0 \leqslant M < 16^L - 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{b}{5^x} &= (c + \frac{M}{16^L - 1}) \cdot 16^{-z} \\ 16^z(16^L - 1)b &= 5^x(16^L - 1)c + 5^x \cdot M \\ 16^z(16^L - 1)b &\equiv 0 \mod 5^x \end{aligned}$$

et comme 5 et b sont premiers entre eux :

$$16^L - 1 \equiv 0 \mod 5^x$$

Ainsi L est un multiple de e, et finalement $L = e$.

Le groupe $(\mathbb{Z}/5^x\mathbb{Z})^*$ a pour cardinalité $5^x - 5^{x-1} = 4 \cdot 5^{x-1}$. Soit f l'ordre de 2 dans ce groupe multiplicatif. Par un résultat connu, l'ordre g de $16 = 2^4$ sera donc $f/\mathrm{PGCD}(4, f)$. [1] Mais comme la plus grande puissance de 2 divisant possiblement f est 4 (car f doit diviser par Lagrange $4 \cdot 5^{x-1}$), l'opération qui transforme f en $g = f/\mathrm{PGCD}(4, f)$ revient à supprimer toute puissance de 2 de f.

Ainsi g est un diviseur de 5^{x-1} et par conséquent une puissance de 5. C.Q.F.D. □

1. C'est l'ordre de 4 dans le groupe additif $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Par une identité de BÉZOUT, $\mathrm{PGCD}(4, f)$ est dans le groupe $< 4 >$, et est clairement d'ordre $f/\mathrm{PGCD}(4, f)$, donc l'ordre de 4 est au moins cela, mais $(f/\mathrm{PGCD}(4, f))4 \equiv 0 \mod f$ donc l'ordre est exactement $f/\mathrm{PGCD}(4, f)$.