Endomorphismes de carrés nuls

Jean-François Burnol, 19 février 2018

On étudie dans ce problème les endomorphismes de carrés nuls.

Soit $\mathbb{K}$ un corps [1], E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \geqslant 1$) et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes de E de carrés nuls.

On notera $GL_{\mathbb{K}}(E)$, ou plutôt $GL(E)$ les $\mathbb{K}$-automorphismes de E.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des triplets (V, W, ψ) composés de deux sous-espaces vectoriels V, W de E, tels que $V \subset W$, et d'un **isomorphisme** $\psi : E/W \to V$. En posant $a = \dim V$, $b = \dim W - \dim V$, on a donc nécessairement $n-(a+b) = a$, $n = 2a + b$, donc $0 \leqslant a \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

On va montrer qu'on a une action naturelle de $GL(E)$ sur $\mathcal{A}$ et une autre sur $\mathcal{S}$, et une $GL(E)$-application du premier sur le second. Définissons déjà cette dernière. Pour $\varphi \in \mathcal{A}$, on pose :

$$\theta(\varphi) = (\operatorname{Im}\varphi, \operatorname{Ker}\varphi, \tilde{\varphi} : E/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi) \tag{1}$$

avec $\tilde{\varphi}$ bien sûr le morphisme φ passé au quotient par son noyau.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{A}$, on a $\theta(\varphi) \in \mathcal{S}$. Il faudra montrer que $\tilde{\varphi}$ est injective et surjective. Ce qui est d'ailleurs ce que l'on fait (ou peut faire) pour démontrer le théorème du rang, en général. En ce qui concerne $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi$, je rappelle que par hypothèse $\varphi \circ \varphi = 0_E$!

2. On fait agir $GL(E)$ sur $\mathcal{A}$ par conjugaison ($f \cdot \varphi = f \circ \varphi \circ f^{-1}$) et de la manière suivante sur $\mathcal{S}$:

$$f \cdot (V, W, \psi) = (f(V), f(W), f \circ \psi \circ \widetilde{f^{-1}}) \tag{2}$$

   Explication : l'application f^{-1} de E vers E passe au quotient en un *isomorphisme* de $E/f(W)$ vers E/W, que l'on a noté $\widetilde{f^{-1}}$. [2] Ensuite on va de E/W vers V par ψ puis de V à $f(V)$ par f. Cela donne un isomorphisme de $E/f(W)$ vers $f(V)$.

   Montrer qu'il s'agit bien d'une action de groupe et que l'application $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ est alors une $GL(E)$-application.

---

1. Sans autre qualificatif, un « corps » est toujours entendu *commutatif*. Les corps non-commutatifs, aussi appelés algèbres à division, sont à peine du programme de l'agrégation qu'elle soit interne ou externe, et concrètement il n'y a que le corps des quaternions qui soit réellement évocable dans le contexte du programme d'Algèbre de ces concours.

2. La notation n'indique pas que cela dépend de W, en fait il faudrait mettre W en indice du ~.

3. Montrer que θ est injective. C'est le **point-clé** pour comprendre les endomorphismes φ de carrés nuls : si l'on a φ_1 et φ_2 avec mêmes noyaux et mêmes images, il faut encore une condition pour qu'ils soient le même morphisme, à savoir que $\widetilde{\varphi_1}$ et $\widetilde{\varphi_2}$ soient les mêmes morphismes. Le fait que φ_1^2 et φ_2^2 soient nuls ne nous dispense pas de cette condition bien sûr ! Noyau et image ne suffisent pas à caractériser φ de carré nul uniquement !
4. Montrer que θ est surjective. C'est en fait très simple : étant donné un triplet (V, W, ψ), on obtient φ par le composé $E \to E/W \xrightarrow{\psi} V \to E$. Il s'agit de vérifier $\operatorname{Ker}\varphi = W$, $\operatorname{Im}\varphi = V$, les deux sont immédiats, et ils impliquent $\varphi^2 = 0_E$. Ensuite il faut vérifier que $\theta(\varphi) = (V, W, \psi)$ ce qui est maintenant tautologique.

On suppose dorénavant que $\mathbb{K}$ est un corps fini, avec q éléments. On va donner la cardinalité de $\mathcal{A}$, car c'est celle de $\mathcal{S}$.

Pour a donné, combien de sous-espaces vectoriels V de dimension a ? Notons $N(n, a, q)$ cette quantité. On commence par compter les systèmes de a vecteurs linéairement indépendants, on en a :

$$(q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{a-1}) = q^{\frac{a(a-1)}{2}}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^{n-a+1} - 1) \tag{3}$$

Puis deux tels systèmes définissent le même espace si et seulement si on passe de l'un à l'autre par des combinaisons linéaires définissant une matrice $a \times a$ inversible, donc il faut diviser par $G(a, q) = \#GL(a, \mathbb{K})$. Ainsi

$$\begin{aligned} N(n, a, q) &= \frac{q^{\frac{a(a-1)}{2}}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^{n-a+1} - 1)}{q^{\frac{a(a-1)}{2}}(q^a - 1)(q^{a-1} - 1)\dots(q - 1)} & (4)\\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^{n-a+1} - 1)}{(q^a - 1)(q^{a-1} - 1)\dots(q - 1)} & (5)\end{aligned}$$

L'analogie réalisée par cette formule entre « combien de choix de a objets parmi n » et « combien de sous-espaces de dimension a dans un espace de dimension n » est frappante (faire $q = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$) et je crois qu'on appelle $N(n, a, q)$ aussi le q-coefficient du binôme de Gauss. [3]

Une fois V fixé, combien de W contenant V et de dimension $a + b = n - a$? C'est le nombre de sous-espaces vectoriels dans E/V de dimension

3. Cela a suscité des théories fort abstraites du « corps avec un seul élément ».

$b = n-2a$. Donc $N(n-a, n-2a, q)$. Finalement combien d'isomorphismes de E/W vers V ? C'est la quantité $G(a,q) = \#GL(a,\mathbb{K})$. Au total

$$\begin{aligned}\#\mathcal{A}(n,q) &= \sum_{0\leqslant a\leqslant \lfloor \frac{n}{2}\rfloor} N(n,a,q)N(n-a,n-2a,q)G(a,q) \qquad (6)\\ &= \sum_{0\leqslant a\leqslant \lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-a+1}-1)}{(q^a-1)(q^{a-1}-1)\dots(q-1)}\frac{(q^{n-a}-1)(q^{n-a-1}-1)\dots(q^{a+1}-1)}{(q^{n-2a}-1)(q^{n-2a-1}-1)\dots(q-1)}\\ &\qquad \cdot q^{\frac{a(a-1)}{2}}(q^a-1)(q^{a-1}-1)\dots(q-1)\end{aligned}$$

ce qui donne au final

$$\#\mathcal{A}(n,q) = \sum_{0\leqslant a\leqslant \lfloor \frac{n}{2}\rfloor} q^{\frac{a(a-1)}{2}} \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{a+1}-1)}{(q^{n-2a}-1)(q^{n-2a-1}-1)\dots(q-1)} \tag{7}$$

Je rappelle que dans
http://jf.burnol.free.fr/agreg180218Aaucarreestnul.pdf
on avait obtenu

$$\#\mathcal{A}(n,q) = \sum_{0\leqslant a\leqslant \frac{n}{2}} q^{a(a-1)/2} \frac{\prod_{a<i\leqslant n}(q^i-1)}{\prod_{1\leqslant k\leqslant n-2a}(q^k-1)} \tag{8}$$

Après examen attentif, nous constatons qu'il s'agit bien de la même formule. Ma remarque sur le fait que notre première approche avait une simplification un peu surprenante est ainsi justifiée. Notre nouvelle approche est complémentaire de la première. Chacune a ses mérites.

Dernière remarque, pour $0 \leqslant 2a \leqslant n$, on a :

$$N(n,a,q)N(n-a,n-2a,q) = N(n,n-a,q)N(n-a,a,q) \tag{9}$$

en comptant de deux manières différentes les couples $V \subset W$. On peut le vérifier sans calcul car

$$N(n,a,q) = N(n,n-a,q) \tag{10}$$

en associant à un $V \subset E$ son orthogonal $V^\perp \subset E^*$ qui est de dimension complémentaire. Par conséquent on a aussi

$$N(n-a,n-2a,q) = N(n-a,n-a-(n-2a),q) = N(n-a,a,q) \tag{11}$$

et l'équation (9) se vérifie en fait terme à terme.