En complément à l'EP1 2018

Jean-François Burnol, 28 janvier 2018

1 Introduction

Il y était question de matrices $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en particulier du fait que leur déterminant est toujours positif ou nul. On peut se limiter aux matrices inversibles de ce type.

Une première approche serait de montrer que l'ensemble des matrices inversibles de ce type est connexe (par arcs, par exemple). En effet, tout d'abord on a justifié dans le sujet que M est semblable à $\bar{M}$, donc son déterminant est réel. Si on peut aller par un chemin continu de M inversible de ce type vers la matrice identité en restant dans les matrices inversibles de ce type on a la conclusion car le déterminant ira continûment jusqu'à 1 en restant réel et en ne s'annulant pas. Mais je n'ai pas vu immédiatement de méthode triviale pour justifier cette connexité (qui est vraie ; on peut le voir en utilisant la méthode de « pivot » que je vais expliquer plus loin). Je n'y ai pas plus réfléchi car je veux quoi qu'il arrive rédiger cette fiche. . .

OK, donc, d'abord je vais changer la notation en

$$M = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix} \tag{1}$$

pour des raisons qui apparaîtront plus tard.

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = -I_{2n}$.

Lemme 1. *$M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est du type (1) si et seulement si M est conjuguée à $\bar{M}$ par J : $JM = \bar{M}J$.*

Il en résulte que les matrices complexes vérifiant (1) forment une $\mathbb{R}$-algèbre stable par conjugaison complexe, par transposée, et par passage à l'inverse.

Preuve.

$$J\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & -D \\ A & C \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} \bar{C} & -\bar{A} \\ \bar{D} & -\bar{B} \end{pmatrix}$$

et la caractérisation suit par identification. Ensuite J est réelle donc $JM = \bar{M}J \implies J\bar{M} = MJ$. Pour la multiplication on écrit $JMN = \bar{M}JN = \bar{M}\bar{N}J = \overline{MN}J$ si

M et N vérifient (1). Pour l'inverse : $JM = \bar{M}J \implies J = \bar{M}JM^{-1} \implies (\bar{M})^{-1}J = JM^{-1}$ et comme l'inverse du conjugué complexe est le conjugué complexe de l'inverse, on a la conclusion. Enfin $JM = \bar{M}J \implies {}^tM{}^tJ = {}^tJ{}^t\bar{M} \implies {}^tM\,J^{-1} = J^{-1}\,\overline{{}^tM} \implies J\,{}^tM = \overline{{}^tM}\,J$ (on a ${}^tJ = -J = J^{-1}$). $\square$

2 Le cas réel

Supposons que M de type (1) soit à coefficients réels :

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{2}$$

Notons $e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et posons $u_1 = e_1 - if_1, \ldots, u_n = e_n - if_n$ de sorte que $u_1, u_2, \ldots, u_n, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}$ est une autre $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^{2n}$. On calcule :

$$\begin{aligned} Mu_j &= (\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}e_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b_{ij}f_i) \\ &\quad - i(-\sum_{1\leqslant i\leqslant n} b_{ij}e_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}f_i) \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (a_{ij} + ib_{ij})e_i - i\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (a_{ij} + ib_{ij})f_i \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (a_{ij} + ib_{ij})u_i \end{aligned}$$

qui ne dépend donc que de $u_1, \ldots, u_n$. En passant aux conjugués complexes on obtient $M\overline{u_j}$. On a donc montré que la matrice réelle M est conjuguée sur $\mathbb{C}$ à

$$M' = \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{pmatrix}, \qquad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{3}$$

et ainsi $\det M = \det M' = |\det(A + iB)|^2 \geqslant 0$.

En fait lors des révisions de janvier 2017 (l'année précédente donc) on avait évoqué la question de considérer un morphisme sur $\mathbb{C}^n$ comme un morphisme réel sur $\mathbb{R}^{2n}$ et du lien entre les déterminants. Ici on a une matrice réelle M, *qui commute avec* J, $J^2 = -I_{2n}$, J *réelle*, ce qui signifie que le morphisme associé sur $\mathbb{R}^{2n}$ peut être vu comme un $\mathbb{C}$-morphisme une fois muni $\mathbb{R}^{2n}$ de la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel telle que la multiplication scalaire par i est le $\mathbb{R}$-morphisme J.

Plus précisément on a $f_j = Je_j$, ce qu'il faut noter donc $f_j = ie_j$ pour cette structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur $\mathbb{R}^{2n}$. Le $\mathbb{C}$-morphisme donné par $A+iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec A et B réelles) dans la $\mathbb{C}$-base $(e_1, \dots, e_n)$ de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel a pour matrice tout simplement M dans la $\mathbb{R}$-base $(e_1, \dots, e_n, ie_1 = f_1, ie_2 = f_2, \dots, ie_n = f_n)$ et on retrouve la discussion de l'année dernière.

Je crois me souvenir qu'on avait établi la relation entre les déterminants en se ramenant au cas des matrices (complexes) triangulaires supérieures, et en utilisant comme $\mathbb{R}$-base $(e_1, ie_1, e_2, ie_2, ..., e_n, ie_n)$. On va s'inspirer de cela dans le cas général.

3 Le cas $n = 1$: quaternions !

Dans le cas $n = 1$ les matrices

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

sont de déterminants $|a|^2 + |b|^2$. Pas de difficulté ici pour montrer que le déterminant est positif !

Mieux, ces matrices 2×2 sont donc nulles ou inversibles. Autrement dit elles forment une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 qui est un corps (non commutatif). Il s'agit bien sûr du corps $\mathbb{H}$ des quaternions (dans une certaine incarnation).

Pour le voir plus clairement posons :

$$1 = I_2, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = IJ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Les relations de Hamilton $1 = -I^2 = -J^2 = -K^2$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$ sont vérifiées.

On peut retrouver les matrices en partant de $\mathbb{H}$ de la manière suivante. *Cette discussion n'est pas nécessaire pour la preuve de la positivité du déterminant en général, vous pouvez passer à la section suivante directement.* Tout d'abord munissons-le d'une structure de $\mathbb{C}$ espace vectoriel en utilisant la multiplication à droite : si $z = u + iv$ est un complexe avec $u, v \in \mathbb{R}$ et h un quaternion, la multiplication scalaire par z de h est définie par $h \cdot z := hu + hIv$. On procède ainsi de sorte que la multiplication à gauche par un quaternion g ($h \mapsto \varphi_g(h) = gh$) soit un $\mathbb{C}$ morphisme et donc représentable par une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une fois choisie une $\mathbb{C}$-base. On prend $(1, J)$ comme $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{H}$.

Soient a et b deux nombres complexes et $g = a + Jb$ le quaternion de coordonnées (a, b) dans la base $(1, J)$, quelle est la matrice $M(g)$ représentant φ_g ?

On calcule $\varphi_g(1) = g$ et $\varphi_g(J) = (a + Jb)J = aJ + JbJ$. Ici intervient un calcul crucial : $b = u + iv$, donc par définition $Jb = J(u + Iv)$ et ainsi $JbJ = J(u + Iv)J = -u + Iv$ car $J^2 = -1$ et $JIJ = JK = I$. Ainsi $JbJ = -u + Iv = 1 \cdot (-\bar{b})$, $\varphi_g(J) = -\bar{b} + aJ$.

Mais il reste à passer a à droite : $aJ = J \cdot (\bar{a})$ par le même genre de calcul (ou en multipliant $JaJ = -\bar{a}$ à gauche par J). Finalement

$$\varphi_g(1) = a + Jb, \qquad \varphi_g(J) = -\bar{b} + J\bar{a} \tag{6}$$

On a retrouvé notre matrice M !

4 Méthode de Gauss avec des blocs 2×2

Je reviens aux matrices $M = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$. C'est la matrice d'un morphisme dans la base $(e_1, e_2, \ldots, , e_n, f_1, \ldots, f_n)$. Un petit moment de réflexion laissé aux lecteurs montre que dans la base $(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_n, f_n)$ ce morphisme devient une matrice N de n^2 blocs 2×2 du type étudié dans la section sur les quaternions. On veut montrer $\det N \geqslant 0$, et donc on peut supposer N inversible.

Je rappelle que ces matrices 2×2 sont soit nulles soit inversibles, et qu'elles forment une algèbre (réelle) intègre de dimension 4, en particulier stable par multiplication et par passage à l'inverse. Comme la matrice N est inversible on peut trouver un bloc 2x2 non nul à l'intersection des lignes $2i - 1, 2i$ et colonnes $1, 2$.

On permute les lignes $2i-1, 2i$ avec les lignes $1, 2$. Cela fait deux échanges de lignes, le déterminant ne bouge et la structure de la matrice non plus.

Notons à ce stade n_{ij} le bloc aux lignes $2i - 1, 2i$ et colonnes $2j - 1, 2j$. En particulier n_{11} est inversible. On multiplie le nouveau N à gauche par la matrice de déterminant 1 :

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & \ldots & \ldots & 0_2 \\ -n_{21}n_{11}^{-1} & I_2 & 0_2 & \ldots & \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0_2 & \ldots & \ldots & & I_2 \end{pmatrix}$$

Cette opération ne change pas le déterminant et annule le deuxième bloc des deux premières colonnes. On continue avec le bloc aux lignes $5, 6$, etc… jusqu'à annuler tous ces blocs des deux premières colonnes.

On se retrouve ainsi avec une matrice N ayant dans les deux premières colonnes un seul bloc 2×2 non nul, tout en haut. Le mineur diagonal de taille $(2n-2)\times(2n-2)$ en bas à droite a conservé la même structure de blocs 2×2 avec des matrices du type (4), par le fait que ces matrices forment une $\mathbb{R}$-algèbre !

En un nombre fini d'étapes notre matrice inversible N est transformée en une matrice du même type mais dont tous les blocs 2×2 sous-diagonaux sont nuls. Par conséquent et par un calcul par blocs son déterminant est le produit des déterminants 2×2 de la diagonale, donc il est strictement positif. C.Q.F.D.

5 Retour aux quaternions, déterminant de Study

Par une extension des calculs de la section 3, on considère $\mathbb{H}^n$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$: tout d'abord on le munit d'une structure de $\mathbb{H}$-module *à droite*, et par restriction à $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ (le i de $\mathbb{C}$ étant le I de $\mathbb{H}$) cela donne une multiplication scalaire (à droite, donc) qui en fait un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension $2n$).

On peut établir que les matrices de type (1) sont associées à des matrices quaternioniques $n \times n$, $G = (g_{ij})$ avec $g_{ij} = a_{ij} + Jb_{ij}$ de la manière suivante. Tout d'abord tout $\mathbb{H}$-morphisme φ donne une matrice G en mettant en j^e colonne les coordonnées de $\varphi(e_j)$, avec :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ \dots &= \dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Car si on veut calculer $\varphi((h_1, \dots, h_n))$ on utilise la $\mathbb{H}$-linéarité :

$$\begin{aligned} (h_1, \dots, h_n) &= e_1h_1 + e_2h_2 + \dots + e_nh_n \\ \varphi((h_1, \dots, h_n)) &= \varphi(e_1)h_1 + \dots + \varphi(e_n)h_n \\ &= (e_1g_{11} + e_2g_{21} + \dots + e_ng_{n1})h_1 + \dots \\ &= e_1(g_{11}h_1 + g_{21}h_2 + \dots) + e_2(\dots) + \dots \end{aligned}$$

Autrement dit l'action de φ est par produit matriciel par G sur la gauche de $h \in \mathbb{H}^n$ vu comme une colonne. Par conséquent le composé $\varphi \circ \psi$ de deux $\mathbb{H}$-morphismes est représenté par le produit matriciel de leurs matrices prises dans le même ordre... (et fait sans permutation de quaternions...).

Si l'on écrit maintenant $G = A + J_{\mathbb{H}}B$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices des coefficients complexes tels que $g_{ij} = a_{ij} + J_{\mathbb{H}} b_{ij}$ (voir note de bas de page [1]) on va pouvoir exprimer l'action de φ comme $\mathbb{C}$-morphisme dans la $\mathbb{C}$-base :

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n \\
e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\
\dots &= \dots \\
f_1 &= (J, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n \\
f_2 &= (0, J, \dots, 0) \\
\dots &= \dots \\
f_n &= (0, 0, \dots, J)
\end{aligned}
$$

En utilisant que cette action se fait par produit matriciel sur la gauche (les éléments de $\mathbb{H}^n$ étant vus comme des colonnes), on calcule $\varphi(e_1), \dots, \varphi(f_n)$ et on retrouve exactement la matrice M de l'équation (1). Cette matrice complexe M de taille $2n \times 2n$ est donc à voir comme une représentation de la matrice quaternionique G de taille $n \times n$, $G = A + J_{\mathbb{H}}B$. Ce passage de G à M est un morphisme pour les multiplications matricielles : on passe de la matrice G au $\mathbb{H}$-morphisme φ puis on voit φ comme un $\mathbb{C}$-morphisme puis on passe à sa matrice dans une $\mathbb{C}$-base. Toutes ces étapes sont des morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres.

Le nombre (réel positif) $\det M$ étudié dans l'EP1 de cette année s'appelle le *déterminant de* S*TUDY de la matrice quaternionique* G. Le déterminant d'un produit est le produit des déterminants. [2]

---

1. j'ai rajouté un $\mathbb{H}$ en indice pour le « scalaire » $J_{\mathbb{H}}$ qui n'est pas exactement la matrice J de taille $2n \times 2n$ vue précédemment ; matrice J qui est néanmoins bien la matrice dans la base $(e_1, \dots, f_n)$ de la multiplication à gauche par le scalaire $J_{\mathbb{H}}$ sur $\mathbb{H}^n$.
2. Attention que cette structure est d'une nature quadratique et non pas linéaire par rapport aux colonnes de la matrice quaternionique.

6 Un peu de symplectique

Je reviens aux notations de l'énoncé. Il y était défini l'application θ, $\mathbb{C}$**-conjugué linéaire** :

$$\theta(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix} \tag{7}$$

L'énoncé faisait préciser que $\theta^2 = -\mathrm{Id}$.

On note $(u, v)_{2n}$ le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^{2n}$, linéaire en la première variable, conjugué-linéaire en la seconde variable. On note la propriété importante suivante.

$$\forall u = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} \qquad (u, \theta(u))_{2n} = (X, -\bar{Y})_n + (Y, \bar{X})_n = -\sum x_i y_i + \sum y_i x_i = 0 \tag{8}$$

Autrement dit pour tout u, on a $u \perp \theta(u)$! en particulier θ n'a pas de vecteurs propres dans $\mathbb{C}^{2n}$, mais j'ai déjà insisté que θ est $\mathbb{C}$**-conjugué linéaire**, alors ne soyons pas surpris !

Définissons maintenant

$$B(u, v) = (u, \theta(v))_{2n} \tag{9}$$

Comme le produit scalaire est conjugué-linéaire en sa deuxième variable et que θ est conjugué linéaire, ce $B(u, v)$ est $\mathbb{C}$-bilinéaire.

De plus on a vu que $B(u, u) = 0$ pour tout u donc (regarder $B(u+v, u+v)$) :

$$\forall u\, \forall v \quad B(u, v) = -B(v, u) \tag{10}$$

Il s'agit donc d'une forme bilinéaire anti-symétrique. Montrons qu'elle est non-dégénérée : il suffit d'observer

$$\forall u \qquad B(u, \theta(u)) = (u, \theta(\theta(u))) = -\|u\|_2^2 \tag{11}$$

Finalement soit M une matrice du type (1). On démontre dans l'énoncé que son polynôme caractéristique est réel, donc il suffit de montrer que la dimension (complexe !) de l'espace caractéristique E'_λ (pour une valeur propre λ **réelle**) est paire afin de conclure que $\det M \geqslant 0$.

On voit dans le sujet que E'_λ est stable par θ (pour λ **réelle**). La forme bilinaire anti-symétrique B restreinte à ce E'_λ est **non-dégénérée**. Preuve : soit $u \in E'_\lambda$ tel que $B(u, v) = 0$ pour tous les $v \in E'_\lambda$. En particulier c'est le cas pour $v = \theta(u)$, puisque l'on sait que $\theta(u) \in E'_\lambda$. Or on a vu plus haut que $B(u, \theta(u)) = -\|u\|_2^2$. Donc $u = 0$ et on a prouvé que B restreinte à $E'_\lambda \times E'_\lambda$ est une forme bilinéaire alternée non-dégénérée : autrement dit il s'agit d'une *forme symplectique* (sur un espace vectoriel).

Or un théorème de classification fondamental (dit de DARBOUX) indique que la dimension d'un espace vectoriel symplectique est toujours paire, vous trouverez la démonstration facilement sur internet. Ce n'est pas très différent d'ailleurs de ce que l'énoncé demande de faire. Voici l'énoncé plus précis de DARBOUX : on peut toujours trouver une base $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, avec $B(u_i, u_j) = 0$, $B(v_i, v_j) = 0$, $B(u_i, v_j) = \delta_{ij}$. C'est la notion de base symplectique.

7 La connexité

Pour finir, la méthode de réduction par pivots matriciels nous permet de voir la connexité. Tout d'abord nous allons relier continûment à l'identité les matrices de permutation telles que rencontrées dans la preuve (pour les autres qui sont triangulaires inférieures c'est trivial de les relier à l'identité). Autrement dit il suffit de traiter le cas de cette matrice complexe :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Ceci est sur $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ mais avec base (e_1, f_1, e_2, f_2). C'est plus simple de revenir à la base canonique (e_1, e_2, f_1, f_2) et la matrice devient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

et doit conserver une structure $\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$ avec $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et la matrice doit rester inversible. Posons :

$$M(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} z & \operatorname{ch} z & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} z & \operatorname{sh} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} \bar{z} & \operatorname{ch} \bar{z} \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \bar{z} & \operatorname{sh} \bar{z} \end{pmatrix} \tag{14}$$

puis posons $z(t) = it$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. À tout moment, la matrice $M(z)$ conserve la structure (1). Son déterminant vaut $(-1) \times (-1) = 1$,[3] elle est donc inversible. Pour $t = 0$ on a $M(z(0)) = M(0) = M$, et pour $t = \frac{\pi}{2}$ on a $M(z(\frac{\pi}{2})) = M(i\frac{\pi}{2})$ et[4]

$$M(i\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \tag{15}$$

Il suffit maintenant de revenir à l'identité via les matrices

$$\begin{pmatrix} e^{i\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\eta} \end{pmatrix} \tag{16}$$

avec η réel variant en décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Le déterminant de la matrice est constamment 1. De plus elle conserve la forme (1). Ceci conclut la preuve de la connexité, pour les matrices inversibles du type (1). Il y a peut-être plus simple… j'ajoute ceci un peu fatigué de la rédaction de ce qui précède, donc peut-être pas très lucide.

Ah justement, je vois que je n'ai pas fini la preuve. Reste encore à traiter la forme réduite, triangulaire supérieure en les blocs 2×2. On se débarrasse des blocs hors-diagonale simplement en les multipliant par un facteur réel qui va de 1 à 0. Reste le cas diagonal. Reste le cas des matrices 2×2 du type (5). Elles sont paramétrées par $\mathbb{C}^2 \setminus (0,0) = \mathbb{R}^4 \setminus (0,0,0,0)$ qui est évidemment connexe (détails laissés au lecteur…).

3. Je rappelle que $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ pour tout nombre complexe z.
4. Je rappelle $\operatorname{ch} iz = \cos z$ et $\operatorname{sh} iz = i \sin z$.