Ce texte utilise la notion d'homographie et le lien entre les homographies et les matrices deux par deux, que nous avons déjà traité en séance (automne 2017).

Coefficients de BÉZOUT et fractions continues

Jean-François Burnol, 22 novembre 2017

Voici une fraction continue (obtenue par divisions euclidiennes successives)

$$F = \frac{2007}{580} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9}}}}}$$

Maintenant, calculons $G = \cfrac{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}{}$. On obtient $\boxed{G = \frac{218}{63}}$. Puis on constate que

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2007 & 218 \\ 580 & 63 \end{vmatrix} = 1}\,.$$

L'explication est simple. On considère l'homographie (agissant disons sur $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$) :

$$f(t) = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{t}}}}}} = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_5 \circ \varphi_1 \circ \varphi_4 \circ \varphi_9(t)\,,$$

avec $\varphi_a(t) = a + t^{-1} = (at + 1)/t$, donc de matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent, f est de matrice associée

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sens où

$$M\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \implies f(t) = \frac{r}{s}$$

ou encore

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \implies f(\frac{p}{q}) = \frac{ap + cq}{bp + dq}$$

— si l'on prend $t = \infty$, soit encore $p = 1$, $q = 0$, on obtient notre fraction d'origine F, donc $\frac{2007}{580} = \frac{a}{b}$,

— et si l'on prend $t = 0$, soit encore $p = 0$, $q = 1$, on a d'abord $9 + t^{-1} = \infty$, puis $1/(9 + t^{-1}) = 0$ et l'on obtient donc notre deuxième fraction et par conséquent $G = \frac{c}{d} = \frac{218}{63}$.

Faisons la remarque que la deuxième fraction $G = v/u$ a été en fait calculée à partir de sa fraction continue par exactement les mêmes étapes qui auraient donné

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

autrement dit $\left(\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right)$ est précisément la seconde colonne $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ de la matrice M. Celle-ci a déterminant +1, et donc $v/u = c/d$ $(= 218/63)$ est une fraction irréductible.

En ce qui concerne la première fraction $F = 2007/580$ *il se trouve qu'elle est irréductible* : mais comme c'était elle le point de départ arbitraire, c'est juste un fait. Tout autre représentant de la même fraction aurait donné la même fraction continue à droite de l'équation, par divisions euclidiennes successives.

Si le représentant A/B de notre fraction d'origine F avait eu un facteur commun D, c'est donc que la première colonne de la matrice aurait été donnée par $a = A/D$ et $b = B/D$ (car la première colonne de la matrice M donne une fraction irréductible). On a donc toujours, en notant ${}^t(v\ u)$ la seconde colonne, l'identité $(A/D)u - (B/D)v = \det M$, ou encore $Au - Bv = \pm D$.

On peut donc d'une manière générale obtenir une identité de BÉZOUT (et par conséquent aussi le PGCD [1]) en réduisant A/B en fraction continue, puis en calculant la fraction v/u à partir de la même fraction continue dont on a laissé tomber la dernière fraction interne. Suivant la parité du nombre de « + » dans la fraction continue d'origine on a le signe – ou le signe + dans l'identité de BÉZOUT.

1. mais en fait la construction de la fraction continue procède par les mêmes divisions euclidiennes que l'algorithme d'Euclide, donc calculer la fraction continue donne le PGCD au passage, avant BÉZOUT.