Dunford avec les valeurs propres mais sans les projecteurs caractéristiques

Jean-François Burnol, avril 2017

Il existe une très jolie méthode qui obtient le D de $A = D + N$ de la décomposition de Dunford, par un algorithme qui termine en un nombre fini d'étapes et prouve que D peut s'écrire comme un polynôme en A, tout cela sans avoir besoin des valeurs propres de A. Voir par exemple ce document de Daniel Ferrand (2003) :

http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Jordan.algor.pdf

La méthode moins imaginative basique est simplement de décomposer l'espace vectoriel V (sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, pour le moment) en la somme d'espaces caractéristiques $\oplus V_\lambda$ et de définir D comme l'endomorphisme agissant par λ sur V_λ. Ensuite il faut justifier que D est un polynôme en A, ce que l'on fait habituellement en montrant que les projecteurs sont des polynômes en A. Ce qui se déduit (je résume) d'un Bezout approprié dans $\mathbf{K}[X]$. Il y a des variantes.

Je veux ici indiquer une formule exprimée avec les valeurs propres qui nous fait l'économie des considérations relatives aux polynômes projecteurs.

Soient donc λ_1, ..., λ_k les valeurs propres distinctes, sans les multiplicités. Ainsi $1 \leqslant k \leqslant \dim V$. Voir plus bas pour la discussion si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et qu'il y a des valeurs propres complexes. Voir plus bas encore si $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$.

Considérons, pour $N \geqslant 1$ un entier, l'endomorphisme

$$Q_N(A) = \sum_j \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i)^N$$

Plus précisément, nous y prendrons N égal au maximum des multiplicités, ou encore si l'on veut, plus simplement $N = \dim V$.

Avec ce N, sur V_{λ_j} l'endomorphisme $Q_N(A)$ agit par le seul terme $\prod_{i\neq j}(A - \lambda_i)^N$, tous les autres étant nuls (à cause de $(A-\lambda_j)^N$, pour ceux qui ne suivent plus). Il y est donc inversible, et donc $Q_N(A)$ est inversible.

Posons

$$D = Q_N(A)^{-1} \sum_j \lambda_j \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i)^N$$

Par Cayley-Hamilton (ou par des raisonnements dans un $\mathbf{K}[X]/I$), $Q_N(A)^{-1}$ est un polynôme en $Q_N(A)$ donc un polynôme en A. Donc D est un polynôme en A. Et comme endomorphisme il agit sur V_λ par la multiplication par λ. C'est donc le D de la décomposition de Dunford.

Remarque additionnelle : si A vient d'une matrice définie sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, et que le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, on fait alors le raisonnement sur $\mathbf{C}$. Les valeurs propres non réelles venant par paires de conjugués, si l'on développe $Q_N(A)$ en une somme de monômes A^n, les coefficients sont réels. De même pour le « numérateur » dans la formule pour D. Donc le D est dans $\mathbf{R}[A]$. Le raisonnement montre que si l'on exprime l'endomorphisme D dans une base de V, sa matrice (réelle) est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ (puisque D agit par des homothéties dans les espaces caractéristiques complexes).

Remarque plus avancée : prenons maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ et donc imaginons A venant d'une matrice à coefficients rationnels. Notons $P \in \mathbf{Q}[X]$ le polynôme caractéristique de A. La formule $Q = P/\mathrm{PGCD}(P, P')$ définit un polynôme à nouveau dans $\mathbf{Q}[X]$. Je rappelle que le calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide se déroule à l'identique que l'on fasse les opérations dans $\mathbf{Q}[X]$ ou dans $\mathbf{C}[X]$. Or, sur $\mathbf{C}$, $Q = \prod_i (X - \lambda_i)$ avec à nouveau les λ_i les valeurs propres (complexes) *distinctes*. [1]

Si l'on développe $Q_N(A) = \sum_j \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i)^N$ en somme de monômes A^k, les coefficients peuvent se voir comme des fonctions polynomiales symétriques des λ_i, à coefficients entiers. Par le Théorème sur les fonctions symétriques ces fonctions polynomiales s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en les fonctions symétriques élémentaires qui sont les coefficients de Q, et donc dans $\mathbf{Q}$. Ainsi $Q_N(A) \in \mathbf{Q}[A]$.

L'endomorphisme inverse $Q_N(A)^{-1}$ est à nouveau dans $\mathbf{Q}[A]$ (par exemple par Cayley-Hamilton). Par le même raisonnement, le numérateur aussi est dans $\mathbf{Q}[A]$ et finalement on a prouvé que D est dans $\mathbf{Q}[A]$.

Mais bien sûr sa diagonalisabilité n'est assurée que sur $\mathbf{C}$.

1. Pour moi P est défini comme étant unitaire, pas avec un $(-1)^{\dim V}$, le PGCD également est défini unitaire, et donc Q est unitaire.