# Sur les inégalités vérifiées par les sommes partielles des séries de Taylor de $\sin$ et $\cos$

Jean-François BURNOL, mars 2017

Considérons par exemple $\sin x$, on veut, disons, montrer

$$\forall x \geqslant 0 \quad \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Pour $x > 0$ petit (i.e. $x^2 < 6$) aucun problème, la série de $\sin x$ est une série alternée et donc on connaît le comportement des sommes partielles d'une telle série. Pour $x$ plus grand, certes les signes alternent, mais les modules ne décroissent pas initialement, donc on ne peut passer par ça (en tout cas pas naïvement).

Si l'on prend la formule avec reste de Taylor-Lagrange on aura par exemple :

$$\forall x > 0 \quad \exists y \in ]0,x[ \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\sin^{(6)}(y)$$

avec, bien sûr $\sin^{(6)} = \sin'' = -\sin$.

Le problème c'est que ce $-\sin y$, on n'en connaît pas le signe !

D'où un pessimisme sur la possibilité d'aboutir par ce biais de la part de certains professeurs vieillissants et qui ont bien mérité une retraite qu'on leur refuse !

Mais on peut s'en sortir ! En fait il faut prendre une formule de Taylor moins longue :

$$\forall x > 0 \quad \exists z \in ]0,x[ \quad \sin x = x + \frac{x^2}{2}\cdot 0 + \frac{x^3}{6}\cdot(-1) + \frac{x^4}{24}\cdot 0 + \frac{x^5}{120}\sin^{(5)}(z)$$

Certes, $\sin^{(5)}(z) = \sin'(z) = \cos(z)$ a un signe inconnu mais en tout cas on a

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} = \frac{x^5}{120}(\cos(z) - 1)$$

et, pour $x > 0$, le terme de droite est négatif ou nul !

On a prouvé notre inégalité

$$\forall x \geqslant 0 \quad \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \leqslant 0$$

ou encore

$$\forall x \geqslant 0 \quad \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Et la méthode marche pour toutes les autres inégalités plus longues, avec $\cos x$ aussi. Je n'écris pas pour ne pas avoir à introduire de notations et distinguer suivant la parité etc...[1]

Peut-on avoir égalité en un certain $x > 0$ ?

1. je suis bien conscient que vous avez sans doute ça dans vos livres, mais même si c'est le cas ça mérite d'être plus connu ; je donne par la suite dans le texte une autre méthode, par récurrence.

Comme le signe est constant, les endroits ($x > 0$) où la fonction s'annule sont des extrema, donc la dérivée aussi s'y annule, donc on aurait aussi

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} = 0$$

Mais on imagine avoir déjà prouvé que ceci est de signe constant (négatif), donc on peut itérer le raisonnement et en déduire

$$-\sin x + x - \frac{x^3}{6} = 0$$

ce qui donne $x^5 = 0$ en comparant avec la première égalité ! Donc $x = 0$.

Ainsi toutes ces inégalités sont strictes pour $x > 0$.

On peut continuer à s'amuser avec ces choses là, en combinant avec les formules intégrales, et de ce point de départ modeste on peut sûrement atteindre bien d'autres domaines, car les inégalités sont au coeur de l'Analyse, et lorsque que quelque chose est toujours positif il est souvent intéressant de le représenter comme un carré, ou une somme de carrés, ou une intégrale de carrés...

Mais restons avec des choses très élémentaires. Je reviens à la question de montrer

$$\forall x > 0 \quad \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

mais au lieu de le faire directement, on va le faire par récurrence sur toutes les inégalités de ce type. On veut montrer

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \leqslant 0$$

par le théorème des accroissements finis :

$$\exists y \in ]0, x[ \quad \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} = x\left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24}\right)$$

Par hypothèse de récurrence la quantité entre parenthèses est $\leqslant 0$, donc on a notre inégalité !

Même mieux : si on prend comme hypothèse de récurrence les inégalités strictes, ça marche car le TAF nous a dit l'existence d'un $y$ dans l'intervalle ouvert $0 < y < x$ et donc notre inégalité est stricte. CQFD.

Peut-on définir $y$ comme fonction de $x$ ?

Voyons à gauche on a un truc équivalent en zéro à $-x^7/7!$ et à droite $-x \cdot y^6/6!$, donc on a truc du genre $x^6/7 \approx y^6$, oh oui, on va pouvoir trouver une solution analytique $y = 7^{-1/6}x + cx^3 + \ldots$ (on aura une solution analytique et impaire), à quoi ressemble cette fonction, ça doit pas être évident, quel est le rayon de convergence, le genre d'équation différentielle qu'elle vérifie etc... Vaut mieux pas qu'on me demande de faire le sujet d'Analyse de l'Agreg 2018... car c'est un thème tout trouvé !