Convergence dominée avec un nombre fini de points exceptionnels

Jean-François Burnol, janvier 2017

Voici le *Théorème Officiel* du programme (je ne fais que citer, c'est pas ma faute) :

Théorème de la Convergence Dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n. Il faut le compléter par les explications suivantes :
« *Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont supposées continues par morceaux sur l'intervalle* I *de définition, c'est-à-dire continues par morceaux sur tout segment contenu dans* I. »

Il aurait pourtant été tellement facile de dire *convergeant simplement sur* I *privé éventuellement d'un nombre fini de points*! Voir

http://jf.burnol.free.fr/agreg170121Convolution.pdf

pour plus de commentaires.

Faisons maintenant l'exercice de déduire du théorème officiel inutilisable ceci :

Théorème de la Convergence Dominée en version à peu près utilisable : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I privé éventuellement d'un nombre fini de points $t_1, \dots, t_N$ vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

Note : pour un énoncé plus puissant et plus général et avec une démonstration complète au niveau du programme de l'agrégation interne, voir :

http://jf.burnol.free.fr/convergencedominee_v2.pdf

Preuve.

Comme f est supposée continue par morceaux, et qu'elle vérifie $|f| \leqslant g$ sur I à l'exception peut-être de $t_1, \dots, t_N$, elle est intégrable. [1]

Quitte à remplacer les f_n par $f_n - f$, f par 0, g par $2g$, on peut supposer que f est identiquement nulle. Tout reste continu par morceaux.

Pour tout $\eta > 0$ on a

$$\left|\int_{I\setminus\cup_j[t_j-\eta,t_j+\eta]} f_n(t)\,dt - \int_I f_n(t)\,dt\right| \leqslant 2N\eta\|g\|_\infty$$

Je me suis autorisé des notations un peu plus avancées que les seuls $\int_a^b$ sinon vraiment c'est plus que trop pénible. Ensuite *hypotheses non fingo* : les segments retirés ne sont bien sûr pas supposés inclus entièrement dans I (ils le seront si $\eta > 0$ est petit pour les points intérieurs, mais un ou deux t_j peuvent être des extrémités de I).

1. Je ne re-définis pas ce qu'on entend par intégrable, voir http://jf.burnol.free.fr/agreg170121Convolution.pdf.

Chaque $\mathrm{I} \setminus \cup_j [t_j - \eta, t_j + \eta]$ est une union finie d'intervalles et pour éviter d'avoir l'ensemble vide on imaginera η petit, mais bon ça marche aussi sinon. Le *Théorème Officiel* s'applique sur chacun des sous-intervalles. Donc :

$$\forall \eta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathrm{I}\setminus\cup_j [t_j-\eta, t_j+\eta]} f_n(t)\,dt \right| = 0$$

Bon, alors prenons $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $2\mathrm{N}\eta \|g\|_\infty \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ puis ce η étant choisi on obtient

$$\left| \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{\mathrm{I}\setminus\cup_j [t_j-\eta, t_j+\eta]} f_n(t)\,dt \right| + \frac{\epsilon}{2}$$

qui est $\leqslant \epsilon$ pour n assez grand par la limite nulle indiquée précédemment. C.Q.F.D.