Continuité de la convolution avec les théorèmes du programme

Jean-François BURNOL, janvier 2017

Dans un sujet récent nous avons eu à traiter de la question de la continuité de $f * g$.

— f et g étaient deux fonctions sur $\mathbf{R}$, nulles en dehors de $[-A, +A]$ et de restrictions à ce segment continues.

— $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{-A}^{+A} f(y)g(x-y)\,dy$

La difficulté, qui n'a pas été vue, était que la fonction $x \mapsto g(x-y)$, pour y fixé, n'était pas une fonction continue de x. Car en effet la continuité de g sur la droite réelle nécessite $g(A) = g(-A) = 0$ et l'énoncé ne faisait nullement cette hypothèse. Donc on ne peut pas appliquer le *Théorème Officiel* que voici (je ne fais que citer, c'est pas ma faute) :

Théorème de continuité : Soient X un ouvert de $\mathbf{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. On suppose que, pour tout t dans I, la fonction partielle $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X et que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I. S'il existe une fonction g intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|f(x, t)| \leqslant g(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X.

Pourquoi diable dans cet énoncé prend-t-on seulement I ouvert ? et aussi pour « continue par morceaux sur I » n'aurait-il pas été plus précis de dire alors « continue par morceaux sur tout segment de I » ? car ce n'est que dans un paragraphe précédent que l'on trouve :
« *Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont supposées continues par morceaux sur l'intervalle* I *de définition, c'est-à-dire continues par morceaux sur tout segment contenu dans* I. »

Mais bref, notre problème principal est que l'on demande la continuité de $x \mapsto f(x, t)$ (x est le paramètre) pour **tout** t (t est la variable d'intégration). Il est très probable que lorsque $t = t_0$ est un point de discontinuité de $f(x_0, t)$ (après tout $f(x_0, t)$ est seulement supposée être continue par morceaux), on risque d'avoir de sérieux problèmes avec la convergence simple de $f(x, t_0)$ vers $f(x_0, t_0)$ lorsque $x \to x_0$ car il faut viser pil poil exactement $f(x_0, t_0)$ qui peut être différent de $f(x_0, t_0^+)$ et de $f(x_0, t_0^-)$. Bref cet énoncé est à peu près inutilisable si la fonction limite a des discontinuités.

On trouve l'origine de cette formulation problématique dans l'énoncé du même programme du *Théorème Officiel de la Convergence Dominée* :

Théorème de la Convergence Dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

Il aurait pourtant été tellement facile de dire *convergeant simplement sur* I *privé éventuellement d'un nombre fini de points* ! Voir [1]

http://jf.burnol.free.fr/agreg170121SaveDominated.pdf

pour l'exercice consistant à justifier cette extension en maintenant les mêmes autres hypothèses.

1. J'ai eu des problèmes informatiques trop compliqués à détailler ici avec un nom de fichier contenant « é ».

À propos voir aussi

http://jf.burnol.free.fr/convergencedominee_v2.pdf

pour une démonstration complète au niveau du programme de l'agrégation interne du théorème de la convergence dominée pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, avec même une infinité (dénombrable) de points exceptionnels.

Mais bref, pour en revenir à notre problème de convolution, on va supposer qu'on n'en dispose pas. De toute façon par rapport à la façon dont le problème a été abordé, déjà il aurait fallu dans les copies avoir le réflexe de revenir au théorème de la convergence dominée, et pas vouloir plaquer à tout prix un théorème tout fait dont les hypothèses ne s'appliquaient pas.

Je remercie le Professeur Thilliez, cette fiche intègrant partiellement nos conversations.

Zeroième approche. Je remercie M. Bourbier pour sa question qui a amené à cette approche. On voudrait montrer sous les hypothèses du début de cette fiche que

$$x \mapsto \int_{-A}^{A} f(y)g(x-y)\,dy$$

est continue. Le piège est qu'il est faux en général que pour y fixé, $g(x-y)$ converge simplement vers $g(x_0-y)$ pour $x \to x_0$ car $g(x-y)$ peut être discontinue en $x_0 = y + A$ ou aussi en $x_0 = y - A$. Néanmoins, la fonction g_+ définie par $\forall t\; g_+(t) = \lim_{u\to 0^+} g(t+u)$ est continue par morceaux, continue à droite, égale à g sauf peut-être en $+A$ donc

$$\int_{-A}^{A} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{-A}^{A} f(y)g_+(x-y)\,dy$$

est une fonction continue à droite de x (je vais vite sur la justification des autres hypothèses) par le *Théorème Officiel de la Convergence Dominée* combiné avec la *caractérisation séquentielle de la continuité*.

Et on montre exactement pareillement qu'elle est continue à gauche en remplaçant g par $g_- : t \mapsto \lim_{u\to 0^-} g(t+u)$. Finalement elle est continue (je vais vite mais bon j'ai déjà donné avec les approches qui suivent).

Première approche. Une approche très naturelle est d'écrire ce que l'on veut prouver. Chaque ligne est impliquée par la suivante

$$\lim_{h\to 0}\int_{-A}^{+A} f(y)g(x+h-y)\,dy \overset{?}{=} \int_{-A}^{+A} f(y)g(x-y)\,dy$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{-A}^{+A} f(y)(g(x+h-y)-g(x-y))\,dy \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{-A}^{+A} |f(y)||g(x+h-y)-g(x-y)|\,dy \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{-A}^{+A} |g(x+h-y)-g(x-y)|\,dy \overset{?}{=} 0 \qquad (f \text{ est bornée})$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{x-A}^{x+A} |g(t+h)-g(t)|\,dt \overset{?}{=} 0 \qquad (t = x-y)$$

La fonction $g(t)$ est possiblement discontinue pour $t=-\mathrm{A}$ ou $t=\mathrm{A}$. Si x n'est pas trop grand en valeur absolue $[x-\mathrm{A}, x+\mathrm{A}]$ contient l'un ou l'autre de ces points (et les deux pour $x=0$). On est amené à dire la chose suivante : soit $\eta>0$ petit et majorons bêtement l'intégrande par $2\|g\|_\infty$ sur $[-\mathrm{A}-\eta, -\mathrm{A}+\eta]$ et $[\mathrm{A}-\eta, \mathrm{A}+\eta]$. Ensuite on prend h plus petit, disons vérifiant de toute façon $|h|<\eta$ et on pose $\omega_\eta(h)=\sup_{-\mathrm{A}+\eta\leqslant t\leqslant \mathrm{A}-\eta}\left|g(t+h)-g(t)\right|$. Comme g est continue sur $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, ce « module de continuité » tend vers zéro lorsque h tend vers zéro. Et la quantité plus haut est majorée par (on pourrait gagner un facteur mais bref) :

$$2\times 2\|g\|_\infty \times 2\eta + 2\mathrm{A}\omega_\eta(h)$$

ATTENTION : on a subtilement utilisé que $g(t+h)-g(t)$ ou vaut zéro (si $|t|\geqslant \mathrm{A}+\eta$, remarquez mon $|h|<\eta$), ou est majoré par $2\|g\|_\infty$, ou est majoré par $\omega_\eta(h)$.

Donc la limite supérieure pour $h\to 0$ est au plus $2\times 2\|g\|_\infty \times 2\eta$ mais $\eta>0$ peut être pris arbitrairement petit, donc cette limite supérieure est nulle et on a fini.

Remarquez que cette méthode n'utilise que le théorème de continuité uniforme sur un segment des fonctions continues, c'est donc une approche *self-contained* contrairement à celle utilisant le *Théorème Officiel de la Convergence Dominée.*

Deuxième approche. On applique votre théorème favori, mais en faisant l'hypothèse supplémentaire que g est continue. On a donc le résultat dans ce cas et il faut l'obtenir en général. Remplaçons g par g_ϵ qui est comme g sauf qu'on l'a prolongée affinement sur $[\mathrm{A}, \mathrm{A}+\epsilon]$ et sur $[-\mathrm{A}-\epsilon, -\mathrm{A}]$ pour qu'elle soit continue sur la droite réelle entière (et nulle en dehors de $[-\mathrm{A}-\epsilon, \mathrm{A}+\epsilon]$). On sait que $f*g_\epsilon$ est continue (le support a augmenté mais il ne jouait aucun rôle en fait dans la preuve de continuité de $f*g$ sous l'hypothèse de continuité de g).

On va maintenant montrer que $f*g_\epsilon$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $f*g$ lorsque ϵ tend vers zéro. Je vous laisse vous convaincre de la majoration suivante (on a $g_\epsilon(t)=g(t)$ sauf exceptionnellement...) :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{R}} f(y)(g_\epsilon(x-y)-g(x-y))\,dy\right| &\leqslant \int_{\mathbf{R}}\left|f(y)\right|\left|g_\epsilon(x-y)-g(x-y)\right|dy\\ &\leqslant \|f\|_\infty\times\|g\|_\infty\times(\epsilon+\epsilon)\end{aligned}$$

et l'on a fini.

Troisième approche. C'est une variante de la précédente. D'abord on traite le cas de g égale à la constante 1 sur l'intervalle $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$. Alors

$$f*g(x)=\int f(y)g(x-y)\,dy=\int f(x-y)g(y)\,dy=\int_{x-\mathrm{A}}^{x+\mathrm{A}} f(t)\,dt$$

qui est clairement une fonction continue et même Lipschitzienne de x car f est bornée.

Puis on traite le cas avec $g(y)=y$ pour $|y|\leqslant \mathrm{A}$. C'est quasi pareil :

$$f*g(x)=\int f(y)g(x-y)\,dy=\int f(x-y)g(y)\,dy=\int_{x-\mathrm{A}}^{x+\mathrm{A}} f(t)(x-t)\,dt=x\int_{x-\mathrm{A}}^{x+\mathrm{A}} f(t)\,dt-\int_{x-\mathrm{A}}^{x+\mathrm{A}} t\cdot f(t)\,dt$$

à nouveau visiblement une fonction continue de x.

Ainsi on a par combinaison linéaire le cas avec g affine sur $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$. Le cas avec $g(-\mathrm{A})=g(\mathrm{A})=0$ est déjà connu (continuité de g sur $\mathbf{R}$), donc par combinaison on obtient que ça marche avec toutes les fonctions g continues sur $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ et nulles en dehors.

Quatrième approche. Encore une variante, on approche g en norme uniforme par une fonction en escalier $g_N = \sum_{0\leqslant k<N} g(-A+2\frac{k}{N}A)\mathbf{1}_{[-A+2\frac{k}{N}A,-A+2\frac{k}{N}A+2\frac{1}{N}A[} + g(A)\mathbf{1}_{\{A\}}$, de sorte que $\|g_N - g\|_\infty \leqslant \omega_g(2\frac{1}{N}A)$ avec ω_g le module de continuité de g sur $[-A,A]$. Attention que je parle bien ici de la norme infini sur toute la droite réelle mais du module de continuité de la restriction de g au segment $[-A,A]$. Les fonctions g_N sont continues par morceaux donc $f*g_N$ se définit sans problème. On a la majoration :

$$\forall x\in\mathbf{R}\quad \left|\int f(y)(g(x-y)-g_N(x-y))\,dy\right| \leqslant \|g-g_N\|_\infty \int |f(y)|\,dy \leqslant \omega_g(\frac{2A}{N})\cdot 2A\|f\|_\infty$$

Ceci démontre la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ des fonctions $f*g_N$ vers la fonction $f*g$.

Or un petit calcul montre que $f*\mathbf{1}_{[c,d]}(x) = \int_{x-d}^{x-c} f(t)\,dt$ et ceci est une fonction continue de x. Par conséquent les $f*g_N$ sont des fonctions continues de x et leur limite uniforme $f*g$ également.

Cette approche est également *self-contained-at-agrint-level.*

Il existe un mythe assez fort en France à cause de BOURBAKI que les mathématiques peuvent être rédigées. C'est absurde, car les Mathématiques n'existent que chez les lecteurs : il est impossible de rédiger ce qui en fait doit être créé par le lecteur. Il est faux qu'on puisse rédiger les Mathématiques sous la forme de symboles ne laissant aucune place au doute de manière irréversible et éternelle. Qui me garantit que tout ce que j'ai vu en écrivant ce texte sera vu par le lecteur? Qui me garantit que je n'ai pas fait une bourde quelque part? rien sauf le fait que je n'en fait jamais – jusqu'à présent! Ce texte est donc une bouteille à la mer comme tout texte mathématique.