Un N$^{\mathrm{e}}$ calcul de « l'inverse de la matrice de Cauchy »

Jean-François Burnol, janvier 2017.

Soient a_i et b_j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, des nombres complexes. On veut calculer l'inverse de la matrice

$$M = \det_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\frac{1}{a_i - b_j})$$

On suppose que les a_i sont distincts, que les b_j sont distincts, et que les a_i sont distincts des b_j, bref que les $2n$ nombres complexes a_i, b_j sont distincts deux à deux.

Je reprends les notations de la fiche précédente

`http://jf.burnol.free.fr/agreg170116DetCauchy.pdf`

On y avait noté $V = \mathbf{C}[X]_{n-1}$ l'espace vectoriel de dimension n des polynômes complexes de degrés au plus $n-1$ et $\mathscr{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ et $\mathscr{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ les deux bases formées par les polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$A_i(X) = \frac{A(X)}{(X - a_i)A'(a_i)} \qquad B_j(X) = \frac{B(X)}{(X - b_j)B'(b_j)}$$

Il est bien connu en effet que pour tout polynôme $K \in V$ on a les écritures :

$$K = \sum_i K(a_i)A_i = \sum_j K(b_j)B_j$$

La matrice $M(\mathscr{A} : \mathscr{B})$ qui exprime les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{A}$ a pour coefficients :

$$M(\mathscr{A} : \mathscr{B})_{ij} = B_j(a_i) = \frac{B(a_i)}{(a_i - b_j)B'(b_j)}$$

ce qui se traduit par l'identité matricielle :

$$M(\mathscr{A} : \mathscr{B}) = V_u \cdot M \cdot V^{-1}$$

avec V_u la matrice diagonale formée par les $B(a_i)$ et V la matrice diagonale formée par les $B'(b_j)$.

De même :

$$M(\mathscr{B} : \mathscr{A})_{ij} = A_j(b_i) = \frac{A(b_i)}{(b_i - a_j)A'(a_j)}$$

ce qui se traduit par l'identité matricielle :

$$M(\mathscr{B} : \mathscr{A}) = U_v \cdot (-{}^tM) \cdot U^{-1}$$

avec U_v la matrice diagonale formée par les $A(b_i)$ et U la matrice diagonale formée par les $A'(a_j)$.

Or $M(\mathscr{A} : \mathscr{B})M(\mathscr{B} : \mathscr{A}) = \mathrm{Id}_n$. C'est à dire :

$$\begin{aligned}
V_u \cdot M \cdot V^{-1} \cdot U_v \cdot (-{}^tM) \cdot U^{-1} &= \mathrm{Id}_n \\
M \cdot V^{-1} \cdot U_v \cdot (-{}^tM) \cdot U^{-1} &= V_u^{-1} \\
M \cdot V^{-1} \cdot U_v \cdot (-{}^tM) \cdot U^{-1} \cdot V_u &= \mathrm{Id}_n \\
&\implies M^{-1} = V^{-1} \cdot U_v \cdot (-{}^tM) \cdot U^{-1} \cdot V_u
\end{aligned}$$

On peut alors passer aux coefficients :

$$
\begin{aligned}
(M^{-1})_{ij} &= B'(b_i)^{-1}A(b_i)\frac{1}{b_i-a_j}A'(a_j)^{-1}B(a_j)\\
&= \frac{\prod_k(b_i-a_k)\cdot\prod_k(a_j-b_k)}{\prod_{k\neq i}(b_i-b_k)\cdot(b_i-a_j)\cdot\prod_{k\neq j}(a_j-a_k)}
\end{aligned}
$$

On va distinguer $i=j$ et $i\neq j$. D'abord le cas $i\neq j$:

$$
\begin{aligned}
(M^{-1})_{ij} &= \frac{(b_i-a_j)(b_i-a_i)\prod_{k\neq i,j}(b_i-a_k)\cdot(a_j-b_i)(a_j-b_j)\prod_{k\neq i,j}(a_j-b_k)}{(b_i-b_j)\prod_{k\neq i,j}(b_i-b_k)\cdot(b_i-a_j)\cdot(a_j-a_i)\prod_{k\neq i,j}(a_j-a_k)}\\
&= (a_j-b_i)\frac{(b_i-a_i)(a_j-b_j)}{(b_i-b_j)(a_j-a_i)}\prod_{k\neq i,j}\frac{(b_i-a_k)(a_j-b_k)}{(b_i-b_k)(a_j-a_k)}
\end{aligned}
$$

Je rappelle la notion de birapport :

$$
[\alpha,\beta,\gamma,\delta] = \frac{(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\delta)}\Big/\frac{(\beta-\gamma)}{(\beta-\delta)}
$$

Ainsi :

$$
(M^{-1})_{ij} = (a_j-b_i)[b_i,a_j,a_i,b_j]\prod_{k\neq i,j}[b_i,a_j,a_k,b_k]
$$

Maintenant pour $i=j$:

$$
\begin{aligned}
(M^{-1})_{ii} &= \frac{\prod_k(b_i-a_k)\cdot\prod_k(a_i-b_k)}{\prod_{k\neq i}(b_i-b_k)\cdot(b_i-a_i)\cdot\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}\\
&= (a_i-b_i)\prod_{k\neq i}[b_i,a_i,a_k,b_k]
\end{aligned}
$$

Bon faudra relire, il était peut-être plus simple de laisser la formule sous la forme quasi-initiale :

$$
(M^{-1})_{ij} = B'(b_i)^{-1}A(b_i)\frac{1}{b_i-a_j}A'(a_j)^{-1}B(a_j) = (a_j-b_i)A_j(b_i)B_i(a_j)
$$

avec les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Et puis, bien sûr il y a une approche complètement différente, que certains jugeront plus simple, qui est de passer par la co-matrice. En effet les coefficients de celles-ci sont eux-mêmes des déterminants du type Cauchy donc on peut calculer la co-matrice et en obtenir l'inverse.

Faisons-le avec $N=(1/(a_i+b_j))$. Ah zut il ne reste pas beaucoup de place, bon, non, je ne fais pas $(1/(a_i+b_j))^{-1}$ par la co-matrice, je laisse en exercice...

Par contre je profite de la place pour expliquer un lien de la fiche précédente avec les matrices de Vandermonde. Si l'on note $\mathscr{W}=(1,X,\dots,X^{n-1})$, alors $M(\mathscr{A}:\mathscr{W})$ est la matrice de Vandermonde $V(a_1,\dots,a_n)$. Donc le quotient $\det V(a_i)/\det V(b_j)$ est $\det M(\mathscr{A}:\mathscr{B})$ que nous avions évalué en utilisant la base intermédiaire $\mathscr{C}$ comme valant $\prod_{j>i}(a_j-a_i)/\prod_{j>i}(b_j-b_i)$. Ce qui montre que $\det V(a_i) = c(n)\prod_{j>i}(a_j-a_i)$ avec une constante $c(n)$. On peut montrer $c(n)=1$ par récurrence (en considérant l'expression comme un polynôme en a_n par exemple). Ce qui au final nous ramène aux approches usuelles plus directes, donc disons qu'on fait ici juste une vérification de cohérence.

Avec comme bonus l'inverse de la matrice de Vandermonde ! En effet $V(a_1,\dots,a_n)^{-1} = M(\mathscr{A}:\mathscr{W})^{-1} = M(\mathscr{W}:\mathscr{A})$, autrement dit la matrice dont la j^{e} colonne est formée par les coefficients du j^{e} polynôme interpolateur de Lagrange A_j... joli, non ?