Un N^e calcul du « déterminant de Cauchy »

Jean-François Burnol, janvier 2017.

Soient a_i et b_j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, des nombres complexes. On veut calculer le déterminant

$$D = \det_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\frac{1}{a_i - b_j}\right)$$

On suppose que les a_i sont distincts, que les b_j sont distincts, et que les a_i sont distincts des b_j, bref que les $2n$ nombres complexes a_i, b_j sont distincts deux à deux.

Il existe de multiples façons de le faire, en voici une sans récurrence, qui repose sur des calculs de changements de bases. Je vais avoir besoin des polynômes interpolateurs de Lagrange, donc d'abord, posons :

$$A(X) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(X - a_i) \qquad B(X) = \prod_{1\leqslant j\leqslant n}(X - b_j)$$

On considère l'espace vectoriel $V = \mathbf{C}[X]_{n-1}$ de dimension n des polynômes complexes de degrés au plus $n-1$. On dispose dans V de deux systèmes libres $(A_1, \dots, A_n)$ et $(B_1, \dots, B_n)$, les polynômes de Lagrange :

$$A_i(X) = \frac{A(X)}{(X - a_i)A'(a_i)} \qquad B_j(X) = \frac{B(X)}{(X - b_j)B'(b_j)}$$

Il est bien connu que $\mathscr{A} = (A_1, \dots, A_n)$ et $\mathscr{B} = (B_1, \dots, B_n)$ sont des bases de V et que pour tout polynôme $K \in V$ on a les écritures :

$$K = \sum_i K(a_i)A_i = \sum_j K(b_j)B_j$$

On va maintenant considérer une troisième base $\mathscr{C} = (C_1, \dots, C_n)$ [1], ainsi définie :

$$\begin{aligned}
C_1 &= (X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)\cdots(X - a_n)\\
C_2 &= (X - b_1)(X - a_3)(X - a_4)\cdots(X - a_n)\\
C_3 &= (X - b_1)(X - b_2)(X - a_4)\cdots(X - a_n)\\
\vdots &= \cdots\\
C_n &= (X - b_1)(X - b_2)(X - b_3)\cdots(X - b_{n-1})
\end{aligned}$$

La matrice qui exprime les vecteurs de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{A}$ est triangulaire supérieure. Par exemple pour la deuxième colonne C_2 les entrées sont $C_2(a_1)$, $C_2(a_2)$, $C_2(a_3) = 0, \dots$ Les éléments sur la diagonale sont $C_1(a_1) \neq 0$, $C_2(a_2) \neq 0$, $C_3(a_3) \neq 0$, …, $C_n(a_n) \neq 0$. Donc $\mathscr{C}$ est en effet une base et son déterminant dans la base $\mathscr{A}$ vaut :

$$\prod_i C_i(a_i) = \prod_{i<j}(a_i - a_j)\cdot\prod_{i>j}(a_i - b_j) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)\cdot\prod_{i>j}(b_j - a_i)$$

1. j'aurais dû m'arranger pour que la lettre soit un $\mathscr{B}$, mais c'était pris et je n'ai pas osé $\mathscr{B}_u$…

La deuxième écriture (on a introduit autant de changements de signes dans le premier produit que dans le second…) simplifie la suite.

De même la matrice qui exprime $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire inférieure et son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ vaut :

$$\prod_j C_j(b_j) = \prod_{i>j}(b_j - a_i) \cdot \prod_{i<j}(b_j - b_i)$$

On y voit un facteur commun avec le déterminant précédent.

Notons $M(\mathscr{A} : \mathscr{C})$ la matrice qui exprime $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{A}$ et $M(\mathscr{B} : \mathscr{C})$ celle qui exprime $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$. Comme il est bien connu on a : $M(\mathscr{A} : \mathscr{C}) = M(\mathscr{A} : \mathscr{B})M(\mathscr{B} : \mathscr{C})$.

En effet je rappelle qu'avec ces matrices de passage, si je multiplie une colonne X sur la gauche par la matrice je passe des coordonnées dans la nouvelle base à celle dans l'ancienne base. Donc ci-dessus en partant de la droite je peux passer des coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ vers celles dans $\mathscr{A}$ soit directement soit par l'intermédiaire de la base $\mathscr{B}$.

Passant au déterminant on obtient :

$$\det M(\mathscr{A} : \mathscr{B}) = \frac{\det M(\mathscr{A} : \mathscr{C})}{\det M(\mathscr{B} : \mathscr{C})} = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i) \cdot \prod_{i>j}(b_j - a_i)}{\prod_{i>j}(b_j - a_i) \cdot \prod_{i<j}(b_j - b_i)} = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)}{\prod_{i<j}(b_j - b_i)}$$

Par ailleurs les entrées de la matrice sont :

$$M(\mathscr{A} : \mathscr{B})_{ij} = B_j(a_i) = \frac{B(a_i)}{(a_i - b_j)B'(b_j)}$$

et l'on voit que la i^{e} ligne a le facteur commun $B(a_i)$, et la j^{e} colonne le facteur commun $B'(b_j)^{-1}$. Ainsi :

$$\det M(\mathscr{A} : \mathscr{B}) = \prod_i B(a_i) \prod_j B'(b_j)^{-1} \cdot D$$

et ensuite :

$$D = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)}{\prod_{i<j}(b_j - b_i)} \frac{\prod_{i\neq j}(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i - b_j)} = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i) \cdot \prod_{\substack{\cancel{i\neq j} \\ i>j}}(b_j - b_i)}{\cancel{\prod_{i<j}(b_j - b_i)} \cdot \prod_{i,j}(a_i - b_j)} = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j}(a_i - b_j)}$$

(après avoir échangé i et j dans le produit des $b_j - b_i$ pour la formulation finale).

Mais dans la pratique cette méthode n'est pas simple à présenter car on a tendance à s'embrouiller avec les indices (j'ai itéré trois fois avant de finaliser la présentation des indices…). Il y a de nombreuses autres approches. [2]

Par ailleurs, avec $b'_j = -b_j$ on obtient :

$$\det_{1\leq i,j\leq n} \frac{1}{a_i + b'_j} = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b'_j - b'_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b'_j)}$$

qui est la formule habituellement présentée, probablement car l'ordre est le même pour les différences des a et celles des b', ce qui est plus simple à mémoriser.

2. J'en ai par exemple une intéressante avec des formes quadratiques. Autre chose : la formule pour $\det M(\mathscr{A} : \mathscr{B})$ est un quotient de Vandermonde et ce lien est clair en remplaçant $\mathscr{C}$ par la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ (on peut démontrer la formule de Vandermonde par ce genre d'approche). De plus on peut inverser la matrice de Cauchy en poursuivant les calculs de cette fiche : car $M(\mathscr{A} : \mathscr{B}) \cdot M(\mathscr{B} : \mathscr{A}) = \mathrm{Id}_n$.