Non algébricité des fractions rationnelles

Jean-François Burnol, décembre 2016

A priori je me serais plutôt lancé dans de longs développements relatifs aux polynômes P_p tels que

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P_p(X + \frac{1}{X}) ,$$

mais finalement je voudrais juste commenter l'unicité.

Tout d'abord, nous sommes en train de considérer des fractions rationnelles, des éléments de $\mathbf{R}(X)$. J'insiste sur le fait que X est une indéterminée là-dedans (et dans l'énoncé d'origine).

Si deux polynômes $P_p^{(1)}$ et $P_p^{(2)}$ sont solutions, leur différence T vérifiera

$$T(X + \frac{1}{X}) = 0$$

en tant que fraction rationnelle.

Pour montrer que T est le polynôme nul, on peut par exemple dire que tout nombre réel $u \geqslant 2$ peut s'écrire sous la forme $x + x^{-1}$, et donc que T va s'annuler sur tout $[\,2\,, +\infty\,[$ et finalement est le polynôme nul.

C'est valable mais pas très satisfaisant : que se passe-t-il si je suppose

$$T(X^6 - 7X^3 + X^{-2}) = 0 \quad ?$$

On pourrait peut-être dire là que tout u positif suffisamment grand est de la forme $x^6 - 7x^3 + x^{-2}$, par le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Et si je regarde maintenant

$$T(\frac{X^6 - 7X^3 + X^{-2}}{X^6 + 5X^4 + X^2 + 1}) = 0 \quad ?$$

Ça commence à devenir compliqué...

Et puis cela fait rentrer pas mal d'analyse dans une question purement algébrique : *pour tout corps* $\mathbf{K}$, *et tout élément non constant* $F \in \mathbf{K}(X) \setminus \mathbf{K}$ *du corps des fractions rationnelles* $\mathbf{K}(X)$ *si la substitution*

$$T(F) = 0$$

est nulle, alors $T \in \mathbf{K}[X]$ *est le polynôme nul.*

Une autre façon d'exprimer cela est : *tout élément non constant* F *d'un corps de fractions rationnelles en une indéterminée est transcendant sur le corps de base* $\mathbf{K}$. Car cela dit exactement que F n'est racine d'aucun polynôme (non nul) à coefficients dans $\mathbf{K}$. [1]

Preuve : la fraction rationnelle (non nulle, puisque non constante) admet une représentation sous la forme

$$F = c\frac{A}{B}$$

1. J'ai un doute philosophique, là, sur le fait de parler tacitement de « racines » pour le polynôme nul.

avec $A, B \in \mathbf{K}[X]$ unitaires, premiers entre eux, et $c \in \mathbf{K}$. Comme F n'est pas une constante, $c \neq 0$, et l'on a $\deg A > 0$ ou (non-exclusif) $\deg B > 0$.

Soit $T = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ est un polynôme non nul de degré n ($c_n \neq 0$), et supposons $T(F) = 0$. En multipliant par B^n, nous obtenons :

$$c_0 B^n + c_1 c A B^{n-1} + \cdots + c_n c^n A^n = 0 \tag{eq1}$$

Pour ne pas s'emmêler les pinceaux, traitons d'abord le cas $n = 0$: T est alors une constante non-nulle et T(F) est aussi cette constante non nulle. Donc on peut supposer $n \geqslant 1$. Traitons $n = 1$, l'équation ci-dessus doit se lire

$$c_0 B + c_1 c A = 0$$

mais c'est encore plus simple de l'écrire sous la forme

$$F = -\frac{c_0}{c_1}$$

qui contredit l'hypothèse que F n'est pas une constante (je rappelle $c_n \neq 0$).

On en arrive à $n \geqslant 2$. On regarde (eq1), et on voit que B divise (dans l'anneau $\mathbf{K}[X]$) tous les termes sauf peut-être le dernier. Donc B divise aussi $c_n c^n A^n$. Cependant B est premier avec A, donc il doit diviser $c_n c^n$, autrement dit B est de degré nul.

Comme F n'est pas une constante, on doit avoir $\deg A > 0$, mais alors $c_n c^n A^n$ a un degré strictement supérieur à tous les autres termes et la somme ne peut pas être nulle, contredisant l'hypothèse $T(F) = 0$. Fin de la preuve.

Je reviens sur le traitement de $B \mid c_n c^n A^n$. Je rappelle qu'il y a une identité de Bezout $UA + VB = 1$. Si l'on écrit $(UA)^n = (1-VB)^n$ et qu'on développe, le terme de droite peut se ré-écrire $1-WB$ avec un certain W. Donc $U^n A^n + WB = 1$, donc $U^n c_n c^n A^n + W c_n c^n B = c_n c^n$. Mais B divise le premier terme, et aussi le deuxième terme, donc il divise $c_n c^n$. C'était juste un petit rappel sur le lien entre Bezout et le Lemme de Gauss.

Et pour $F = X + X^{-1}$, c'était plus facile que le cas général traité ci-dessus. Si T est un polynôme non nul de degré n, alors

$$X^n T(X + X^{-1}) = X^n \sum_{k=0}^{n} c_k (X + \frac{1}{X})^k = \sum_{k=0}^{n} c_k X^{n-k} (X^2 + 1)^k$$

est une somme de polynômes, le dernier ayant un degré exactement 2n qui est strictement supérieur à celui de tous les autres (qui sont parmi les $n + k$, $k < n$, ainsi que $-\infty$ s'il y a un coefficient nul). Cette somme ne peut donc pas être nulle (dans $\mathbf{K}[X]$) et ainsi $T(X + X^{-1}) = 0$ (dans $\mathbf{K}(X)$) est impossible si T est un polynôme non nul.