Transformées de Laplace non absolument convergentes

Jean-François Burnol, novembre 2016

Aujourd'hui nous avons fait (partiellement) un problème sur les transformées de Laplace. Certaines démonstrations étaient assez subtiles car on n'avait pas le droit de supposer les intégrales absolument convergentes.

Commençons par l'exemple que j'ai donné de cette fonction définie pour $x \geqslant 2$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} e^x \sin(e^x)$$

et par $f(x) = f(2)$ pour $0 \leqslant x < 2$ pour qu'elle soit continue comme dans les énoncés du problème.

$$\int_2^{\mathrm{T}} f(x)\,dx = \int_2^{\mathrm{T}} \frac{\sin(e^x)}{x} e^x\,dx = \int_{e^2}^{e^{\mathrm{T}}} \frac{\sin(u)}{\log u}\,du$$

La limite existe pour $\mathrm{T} \to \infty$ par le critère d'Abel. Donc, la transformée de Laplace $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ existe aussi pour $\Re s > 0$, d'après le problème d'aujourd'hui. Je vais me contenter de $s = a$ réel. Pour quelles valeurs de a l'intégrale est-elle absolument convergente ?

Il s'agit d'examiner

$$\int_2^\infty |f(x)| e^{-ax}\,dx = \int_{e^2}^\infty \frac{|\sin(u)|}{\log u \cdot u^a}\,du$$

Cette intégrale converge pour $a > 1$. Montrons qu'elle diverge pour $a = 1$ (donc pour $a \leqslant 1$). On note I_n la valeur de l'intégrale sur $[\,n\pi, (n+1)\pi\,]$. Comme $g(u) = 1/(\log u \cdot u)$ décroît,

$$\mathrm{I}_n \geqslant g((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} |\sin u|\,du = 2g((n+1)\pi)$$

Il est clair que la série de terme général $g(n\pi)$ diverge et on a fini.

Bon, après j'ai dit que peut-être on pourrait trouver une fonction $f(x)$ avec $\int_0^\infty f(x)\,dx$ qui converge mais telle que $\int_0^\infty e^{-ax} f(x)\,dx$ n'est *jamais* absolument convergente. Eh bien, malgré le fait que je voulais surtout visionner mon enregistrement de Hellboy, je me suis tout de même penché sur la question et j'ai trouvé une fonction. Attention, mettez les ceintures :

$$f(x) = \frac{\exp(i e^{x \log x - x}) e^{x \log x - x} \log x}{x}$$

disons pour $x \geqslant 2$ à nouveau et $f(x) = f(2)$ pour $0 \leqslant x < 2$.

Montrons que $\int_2^\infty f(x)\,dx$ converge.

Soit $\mathrm{F}(x) = \exp(i e^{x \log x - x})$. On calcule

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{F}(x) \cdot i \cdot e^{x \log x - x} \cdot \log x$$

(je rappelle que $x \log x - x$ est une primitive de $\log x$), donc :

$$f(x) = -i \frac{\mathrm{F}'(x)}{x}$$

et l'intégrale

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = -i \int_2^\infty \frac{\mathrm{F}'(x)}{x}\,dx$$

converge par le critère d'Abel, psuique la fonction F est bornée, elle est même simplement de module 1. On peut aussi procéder par une intégration par parties.

Et si on regarde maintenant la convergence absolue, on est ramené à

$$\int_2^\infty |f(x)|e^{-ax}\,dx = \int_2^\infty e^{x\log x - x}\log x \frac{1}{x} e^{-ax}\,dx$$

or la fonction intégrée est

$$e^{x\log x - x + \log\log x - \log x - ax}$$

et il clair, quelle que soit la valeur de a que pour x suffisamment grand cette fonction est croissante et tend vers l'infini, en particulier elle est minorée par 1 pour x grand et l'intégrale diverge. C.Q.F.D.

Bon j'avoue tout, en fait diverses considérations m'avaient amené à

$$\frac{\sin(e^{x\log x - x})e^{x\log x - x}\log x}{x}$$

qui est la partie imaginaire de la fonction ci-dessus. Il est plus délicat de justifier la non-absolue convergence, donc j'ai défini en plus

$$\frac{\cos(e^{x\log x - x})e^{x\log x - x}\log x}{x}$$

Comme $|\sin t| + |\cos t| \geqslant \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, il est clair (par le résultat précédent) qu'il est impossible, pour le même facteur additionnel e^{-ax}, que les deux intégrales soient simultanément absolument convergentes. Je laisse le petit raisonnement logique qui prouverait que pour l'une des deux fonctions *toutes* les intégrales $\int |f(x)|e^{-ax}\,dx$ divergent.

Travailler avec la fonction à valeurs complexes plus haut évacuait le problème de prouver que *chacune* donne des intégrales divergentes. Faisons le maintenant :

$$\int^\infty \frac{|\sin(e^{x\log x - x})|e^{x\log x - x}\log x}{x} e^{-ax}\,dx = +\infty$$

La fonction $x\log x - x$ de dérivée $\log x$ est strictement croissante pour $x > 1$ (et on prend $x \geqslant 2$ de toute façon). Soit $\theta(x) = \exp(x\log x - x)$ et soit x_n défini par $\theta(x_n) = n\pi$, pour $n \geqslant 1$. On remarquera que $\theta(2) = 4e^{-2} < \pi$.

La fonction $x^{-1}e^{-ax}$ est décroissante (on peut se limiter à $a \geqslant 0$), donc on peut minorer, pour n impair :

$$\mathrm{I}_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\sin(e^{x\log x - x})|e^{x\log x - x}\log x}{x} e^{-ax}\,dx \geqslant x_{n+1}^{-1}e^{-ax_{n+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)\sin(\theta(x))\theta'(x)\,dx$$

$$\mathrm{I}_n \geqslant x_{n+1}^{-1}e^{-ax_{n+1}}[\cos(\theta(x))]_{x_n}^{x_{n+1}} = 2x_{n+1}^{-1}e^{-ax_{n+1}}$$

Pour n pair le sinus est positif sur l'intervalle, la primitive est avec $-\cos$, et on obtient la même formule.

Finalement il s'agit de s'assurer de la divergence de la série de terme général positif $u_n = x_n^{-1}e^{-ax_n}$. J'avais tenté des choses moins bonnes avant, mais je vois que là ça va marcher, faut juste se rappeler du contexte :

$$u_n = x_n^{-1}e^{-ax_n} = e^{-\log x_n - ax_n}$$

On veut montrer que ce truc n'est pas trop petit, c'est-à-dire que $\log x_n + ax_n$ n'est pas trop grand. Et la lumière jaillit, car c'est justement pour cela que j'avais introduit initialement le facteur $\log x$ dans $x\log x$.

Pour $n \gg 1$ on a sûrement $\log x_n + a x_n \leqslant x_n \log x_n - x_n$ puisque $x_n \to +\infty$. Or le terme de droite est par définition $\log(n\pi)$. On a donc prouvé

$$n \gg 1 \implies u_n \geqslant e^{-(x_n \log x_n - x_n)} = \frac{1}{n\pi}$$

Ouf ! (et on voit qu'on a là un principe général, pas lié à notre choix compliqué).

Arrivé là je me dis que je me suis bien compliqué la vie avec ma primitive en $\cos(e^{x\log x - x})$. Essayons avec $\mathrm{F}(x) = \cos e^{x^2}$. Soit alors $f(x) = -\mathrm{F}'(x)/x$, autrement dit :

$$\boxed{f(x) = \sin(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2}$$

Par le critère d'Abel, $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge. Montrons que la transformée de Laplace $\int_0^\infty f(x) e^{-ax}\,dx$ n'est *jamais* absolument convergente.

Il s'agit d'examiner

$$\int_0^\infty |\sin(e^{x^2})| e^{x^2} 2 e^{-ax}\,dx$$

Il faut faire apparaître la dérivée à nouveau, donc :

$$\int_0^\infty \pm\sin(e^{x^2}) e^{x^2} 2x \cdot x^{-1} e^{-ax}\,dx$$

On pose $x_n = \sqrt{\log n\pi}$, $n \geqslant 1$, et pour n impair (on suppose $a \geqslant 0$) :

$$\mathrm{I}_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\sin(e^{x^2})| e^{x^2} 2x \cdot x^{-1} e^{-ax}\,dx \geqslant \mathrm{J}_n \cdot x_{n+1}^{-1} e^{-a x_{n+1}}$$

$$\mathrm{J}_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} -\sin(e^{x^2}) e^{x^2} 2x\,dx = [\cos(e^{x^2})]_{x_n}^{x_{n+1}} = +2$$

Et donc $\mathrm{I}_n \geqslant 2 x_{n+1}^{-1} e^{-a x_{n+1}}$ et de même pour n pair.

On regarde la série de terme général $u_n = x_n^{-1} e^{-a x_n}$.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{\log n\pi}} \exp -a\sqrt{\log n\pi}$$

On va continuer sans trop se focaliser sur cette formule explicite. On écrit plutôt :

$$u_n = \frac{1}{\exp(\log x_n + a x_n)}$$

et comme certainement $\log x_n + a x_n \leqslant x_n^2$ pour n grand on peut majorer le dénominateur par $\exp x_n^2 = n\pi$ et on retrouve la même chose que précédemment (c'est pour cela que j'ai dit qu'il y avait là un principe général) : $\boxed{n \gg 1 \implies u_n \geqslant (n\pi)^{-1}}$ et donc $\sum u_n = +\infty$.

Je termine un peu tard, mais c'est que j'ai visionné la fin de Hellboy entretemps.

Terminons maintenant avec encore plus fort : une fonction $f(x)$ telle que $\int_0^\infty f(x) e^{-sx}\,dx$ converge pour *tous les s*, mais qui n'est *jamais* absolument convergente.

T.S.V.P.

On pose :

$$f(x) = \sin(e^{e^x})e^{e^x}e^x \cdot e^{-x^2}$$

Commençons par montrer que $\int_0^\infty f(x) \cdot e^{-ax}\,dx$ est *toujours convergente* (même pour $a < 0$). Soit $\theta(x) = \exp(\exp(x))$ de sorte que $f(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos\theta(x) \cdot e^{-x^2}$.

Si on regarde, pour un a fixé quelconque, même négatif, $f(x)e^{-ax} = (-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos\theta(x)) \cdot e^{-x^2-ax}$ on voit qu'elle est le produit d'une fonction qui a une primitive bornée et d'une fonction positive décroissante pour $x \gg 1$ et qui tend vers zéro à l'infini. Par le critère d'Abel (ou une intégration par parties), l'intégrale sur $[\,0, +\infty\,[$ est convergente. Donc la transformée de Laplace est définie sur tout le plan complexe (mais dans cette fiche je regarde surtout les $s = a$ réels).

Montrons qu'elle n'est *jamais absolument convergente*, c'est-à-dire :

$$\forall a \quad \int_0^\infty |\sin(e^{e^x})|e^{e^x}e^x \cdot e^{-x^2-ax}\,dx = +\infty$$

On peut supposer $a \geqslant 0$, la divergence pour a implique celle pour les $a' \leqslant a$. La fonction e^{-x^2-ax} est décroissante, on peut recommencer nos histoires avec cette fois-ci $x_n = \log\log(n\pi)$ et

$$\mathrm{J}_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\sin(e^{e^x})|e^{e^x}e^x\,dx = \pm\Big[\cos(e^{e^x})\Big]_{x_n}^{x_{n+1}} = 2$$

$$\mathrm{I}_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\sin(e^{e^x})|e^{e^x}e^x \cdot e^{-x^2-ax}\,dx \geqslant e^{-x_{n+1}^2-ax_{n+1}}\mathrm{J}_n = 2e^{-x_{n+1}^2-ax_{n+1}}$$

Il suffit de s'assurer de la divergence de la série de terme général

$$u_n = e^{-x_n^2-ax_n}, \quad x_n = \log\log(n\pi)$$

Mais certainement $x_n^2 + ax_n \leqslant e^{x_n} = \log(n\pi)$ pour $n \gg 1$ et par conséquent $u_n \geqslant (n\pi)^{-1}$. Ce qui conclut la démonstration.