Partitions

Jean-François Burnol, novembre 2016

Soit $n \geqslant 1$ et B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\mathrm{X} = \{1, \dots, n\}$. Une partition est la donnée d'un entier $k \geqslant 1$, de parties A_i non vides deux à deux disjointes et d'union X, $1 \leqslant i \leqslant k$, *mais sans tenir compte de l'énumération*. Disons que nous avons une partition énumérée lorsque l'on a choisi A_1, puis A_2, puis ..., puis A_k avec les conditions précédentes. Notons $\mathrm{B}(n,k)$ le nombre de partitions énumérées avec k parties (donc en fait $1 \leqslant k \leqslant n$).

On a la formule (qui est une somme finie par ce qui précède) :

$$\mathrm{B}_n = \sum_k \frac{1}{k!} \mathrm{B}(n,k)\,, \tag{1}$$

puisqu'à chaque partition correspond en fait $k!$ partitions énumérées avec k le nombre de parties dans la partition.

À toute partition **énumérée** on peut associer la partition $j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$ de l'entier n en définissant $j_i = \#\mathrm{A}_i \geqslant 1$. C'est là l'intérêt de passer à des partitions énumérées.

Il est facile d'énumérer (sic) les partitions énumérées correspondant à une partition de l'entier n : on a $\binom{n}{j_1}$ choix d'une partie à j_1 éléments, puis $\binom{n-j_1}{j_2}$ d'une partie à j_2 éléments ...

Donc un total de

$$\frac{n!}{j_1!(n-j_1)!} \frac{(n-j_1)!}{j_2!(n-j_1-j_2)!} \cdots = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_k!} \tag{2}$$

partitions énumérées correspondant à des cardinalités données $(j_1, \dots, j_k)$ (c'est un nombre multinomial). Ainsi :

$$\mathrm{B}(n,k) = \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_k=n \\ j_1 \geqslant 1, \dots, j_k \geqslant 1}} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_k!} \tag{3}$$

Il n'est pas tout-à-fait trivial sur la formule que cet entier est un multiple de $k!$,[1] mais c'est trivial du point de vue précédent qui expliquait que $\mathrm{B}(n,k)/k!$ compte en fait les partitions possédant k parties.

Et nous obtenons notre formule finale :

$$\mathrm{B}_n = \sum_k \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_k=n \\ j_1 \geqslant 1, \dots, j_k \geqslant 1}} \frac{n!}{k! j_1! j_2! \dots j_k!} \tag{4}$$

qui est exactement ce à quoi nous avions abouti par e^{e^x-1}.

Une fois obtenue ce e^{e^x-1} on peut l'écrire $\frac{1}{e}e^{e^x}$ et en déduire l'autre formule pour B_n, quotient par e d'une série infinie.

1. car ce n'est pas le cas des coefficients multinomiaux individuels, déjà par exemple parce que les coefficients du binôme ne sont pas tous des nombres pairs, $\frac{3!}{2!1!} = 3$ n'est pas pair. Si les j_i sont distincts deux à deux on voit comment gagner le facteur $k!$ en les ordonnant, mais s'ils ne sont pas distincts ça devient plus embrouillé.