comment ne pas faire un flop avec le flot (mais il faut parler assez vite pour que ça tienne)

Jean-François Burnol, octobre 2016

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $f : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ de classe C^1. Si l'on dispose d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ faut-il qu'il soit attaché à un point de $x \in \mathsf{U}$ ou à un point $y \in \mathsf{V}$ pour qu'on puisse le transformer naturellement par f ?

Réponse : à un point x de U, car on a justement la différentielle $\mathsf{D}f_x$, qui est une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^p$, et un vecteur $\boldsymbol{v}$ attaché à $x \in \mathsf{U}$ est un élément de $\mathbf{R}^n$. Une autre façon de le voir est de se rappeler (hmm...) qu'un vecteur au point x peut être défini comme une classe d'équivalence de courbes paramétrées passant par x au temps $t = 0$ avec une certaine relation d'équivalence inutile d'indiquer ici. Et on peut passer via f d'une courbe à valeurs dans U à une autre à valeurs dans V mais certainement pas dans le sens contraire (en général, à cause des possibilités $n > p$ ou $n < p$). Bref, d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ au point x on passe à un vecteur $\boldsymbol{w}$ au point $f(x)$ via

$$\boldsymbol{w} = \mathsf{D}f_x(\boldsymbol{v}) = f_*(\boldsymbol{v})$$

—§—

Remarque : par contre si l'on dispose d'une *fonction à valeurs réelles* ϕ, alors l'opération naturelle est de lui associer via f la fonction $\phi \circ f$, donc de ϕ sur V on passe à $f^*(\phi) = \phi \circ f$ sur U. Les coordonnées sont des fonctions parmi les autres. On voit donc que les coordonnées peuvent être ramenées de V à U via f, tandis qu'un vecteur va dans le sens contraire. Pour cette raison on dit qu'un vecteur est (un tenseur) *contravariant*. Il existe des objets qui s'appellent les *formes différentielles* (les duales des vecteurs), qui sont des tenseurs *covariants*, c'est-à-dire qui se transforment dans le même sens que les fonctions.

—§—

Supposons maintenant qu'on dispose d'un *champ de vecteurs* sur U, peut-on bricoler un *champ de vecteurs* sur V ?

$$\text{peut être par } \boldsymbol{w}_y = \mathsf{D}f_x(\boldsymbol{v}_x) \text{ si } y = f(x)\ ?$$

En général non car il peut y avoir plusieurs x qui donnent le même y et il peut y avoir des y qui ne sont pas de la forme $f(x)$. [1]

Mais si l'on suppose $p = n$ et que f est bijective alors la définition ci-dessus a un sens. Cependant il y a une perte de régularité possible : pour s'en convaincre prenons le champ de vecteur constant $\boldsymbol{v}_x = (1, 0, \dots, 0)$, et notons $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées canoniques sur $\mathbf{R}^n$, alors

$$\boldsymbol{w}_y := \mathsf{D}f_x(\boldsymbol{v}_x) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} f_1, \frac{\partial}{\partial x_1} f_2, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1} f_p\Big)\Big|_{x = f^{-1}(y)} \qquad (\text{rappel} : p = n)$$

Si l'on suppose que f est un C^1 difféomorphisme, il est possible que les dérivées partielles ci-dessus soient seulement continues. Remarquez que mon champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ initial avait le maximum de régularité possible, car il était carrément un champ constant. En tout cas la formule $\boldsymbol{w} = f_*\boldsymbol{v}$ fonctionne pour un C^1 difféomorphisme f, mais le champ de vecteurs n'est garanti que C^0, même si $\boldsymbol{v}$ était C^∞. Bien sûr si f est C^∞ il n'y a plus de problèmes. C'est d'ailleurs pour

1. D'où la supériorité des formes différentielles car f^* fonctionne globalement même avec $n \neq p$, contrairement au f_* qui est défini seulement ponctuellement en général.

cela qu'on développe en général (au moins dans un premier temps) la géométrie différentielle sur des variétés de classe C^∞ et avec des morphismes de classe C^∞.

—§—

Venons-en maintenant au problème du *redressement ~~productif~~ d'un champ de vecteurs*. On va partir d'un champ de vecteurs w sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de classe C^1. On se donne un point y_0 tel que $w(y_0) \neq 0$ et on cherche $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$, de classe C^1 qui fait un difféomorphisme de Ω avec un voisinage de y_0 de sorte que l'on puisse écrire $w|_{f(\Omega)} = f_*(v)$ pour un certain champ de vecteurs v constant sur Ω.

Plus précisément on va s'arranger pour prendre $v = (1, 0, \ldots, 0)$. Il s'agit donc a priori de résoudre un horrifique système d'équations pour des fonctions $f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$ formant un C^1 difféomorphisme d'un certain Ω vers un voisinage de $y_0 \in \mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= w_1(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, \ldots, x_n) &= w_2(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \\
\cdots \quad \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f_n(x_1, \ldots, x_n) &= w_n(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}$$

Cette chose affreuse change tout-à-fait d'apparence si l'on fixe x_1, x_2, ..., x_n, et que l'on introduit :

$$\begin{aligned}
x(t) &:= (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n) \\
y(t) &:= f(x(t)) = (f_j(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n))_{1 \leqslant j \leqslant n}
\end{aligned}$$

car le système admet alors l'écriture compacte :

$$\frac{d}{dt} y(t) = w(y(t)),$$

autrement dit $t \mapsto y(t)$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs w !

—§—

Bon, maintenant on va simplifier sans réelle perte de généralité en supposant que $y_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Aussi, je note y_1, y_2, ..., y_n les coordonnées canoniques en espérant ne pas créer de confusion avec y_0. Et je suppose que $w(y_0)$ a sa première composante non nulle, autrement dit il est transverse à l'hyperplan $y_1 = 0$, donc $w(y)$ l'est aussi pour y proche de l'origine dans cet hyperplan. Intuitivement on visualise les courbes intégrales proches de celles passant par $y_0 = 0$ comme formant un faisceau paramétré par les points de l'hyperplan proches de y_0.

Ce qui amène à postuler que $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ sera simplement $y = (0, x_2, \ldots, x_n)$, et donc que $f(t, x_2, \ldots, x_n)$ sera la position à l'instant t sur la courbe intégrale passant à $t = 0$ par $(0, x_2, \ldots, x_n)$. Ou, en des termes plus savants

$$f(t, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_t((0, x_2, \ldots, x_n))$$

Nous prenons pour Ω tout d'abord un ouvert de la forme $\{|t| < \epsilon\} \times \{\|(x_j)_{j \geqslant 2}\| < \eta\}$, avec η choisi de sorte que le compact $\{\|(0, x_2, \ldots, x_n)\| \leqslant \eta\}$ est inclus dans l'ouvert V et ensuite ϵ suffisamment petit pour que les images de ce compact par tous les Φ_t soient entièrement incluses dans V pour $|t| < \epsilon$. Puis nous admettons que l'application

$$(t, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \mapsto f(t, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_t((0, x_2, \ldots, x_n)) \in V$$

est de classe C^1.

Il nous reste encore à remplacer Ω par un Ω' plus petit de sorte que ce f restreint à Ω' soit un C^1 difféomorphisme avec son image. Ce qui par le théorème d'Inversion Locale sera toujours possible si la différentielle de f au point $(0, 0, \ldots, 0)$ est inversible.

Les dérivées partielles par rapport à $x_2, \ldots, x_n$ se calculent à $t = 0$ et $f(0, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_2, \ldots, x_n)$ par définition. Cela donne dans la jacobienne un bloc $(n-1) \times (n-1)$ égal à la matrice identité. Ne reste plus qu'à regarder $\frac{\partial}{\partial t} f$ à l'origine, mais par définition de Φ_t, c'est exactement $w(0, \ldots, 0)$. Le déterminant jacobien est ainsi égal à la première coordonnée de ce vecteur. On l'a supposée non nulle, donc on a ce qu'on voulait : on peut choisir Ω' qui fait de f un C^1 difféomorphisme sur son image. On peut lui imposer d'être de la forme d'un produit cartésien d'un intervalle $]-a, a[$ et de la boule ouverte centrée en l'origine de rayon r.

Ceci étant fait, il nous reste peu de choses à dire. Mais faisons le tout de même. Après une respiration.

—§—

On a par définition, et tant qu'on est dans Ω' :

$$f(t + u, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_{t+u}((0, x_2, \ldots, x_n))$$

Mais une propriété fondamentale du flot est celle de semi-groupe (ou même de groupe car on peut intégrer vers le passé ici) : $\Phi_{t+u} = \Phi_u \Phi_t$. Ainsi :

$$f(t + u, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_u(\Phi_t(0, x_2, \ldots, x_n)) = \Phi_u(f(t, x_2, \ldots, x_n))$$

On dérive par rapport à u et on pose après $u = 0$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x_2, \ldots, x_n) = w(f(t, x_2, \ldots, x_n))$$

Mais je rappelle que le terme de gauche (remplacez la lettre t par x_1 et comparez aux formules traitées antérieurement) est exactement

$$Df_{(t, x_2, \ldots, x_n)}(1, 0, \ldots, 0)$$

et on a donc précisément démontré que le champ de vecteurs $f_*((1, 0, \ldots, 0))$ (avec f restreint à Ω') est le champ de vecteurs w restreint à $f(\Omega')$.