Difféomorphisme entre le cube ouvert et la boule ouverte (en dimension n)

Jean-François Burnol, octobre 2016

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathrm{U}_n, \mathrm{V}_n$ les ouverts de $\mathbf{R}^n$ définis respectivement par

$$x \in \mathrm{U}_n \iff \|x\|_\infty < 1$$
$$x \in \mathrm{V}_n \iff \|x\|_2 < 1 ,$$

autrement dit le cube ouvert et la boule euclidienne ouverte.

Théorème. *Il existe un* C^∞*-difféomorphisme* $\phi_n : \mathrm{U}_n \to \mathrm{V}_n$.

Par récurrence sur n, tout bêtement. Pour $n = 1$, ϕ_n est pris simplement comme étant la fonction identité. Supposons connu ϕ_n. Dans le cube de dimension $n+1$, si les n premières coordonnées $x_1, \dots, x_n$ sont fixées, il y a un intervalle $]-1,1[$ pour la dernière coordonnée. Tandis que dans la boule, si les n premières coordonnées $u_1, \dots, u_n$ sont fixées il y a un intervalle $]-c(u), c(u)[$ pour la dernière coordonnée avec

$$c(u) = \sqrt{1-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}$$

Cela suggère de poser la définition suivante :

$$\phi_{n+1}(x) = \left(\phi_n(x_1,\dots,x_n), x_{n+1}\sqrt{1-\|\phi_n(x_1,\dots,x_n)\|_2^2}\right)$$

Il est clair [1] que cela est, par récurrence, bien défini comme fonction de U_n vers V_n et de classe C^∞, par le théorème de composition des fonctions différentiables.

Injectivité : si $\phi_{n+1}(x') = \phi_{n+1}(x)$, les images par ϕ_n des deux n-uplets formés en oubliant les dernières coordonnées sont égales, donc x et x' ont les mêmes premières n coordonnées. Mais alors $x_{n+1} = x'_{n+1}$ également en regardant la dernière coordonnée.

Surjectivité : si $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est dans V_{n+1} alors a fortiori $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{V}_n$. Par hypothèse de récurrence il est de la forme $\phi_n(x_1, \dots, x_n)$. Comme

$$1 > \|u\|_2^2 = \|\phi_n(x_1,\dots,x_n)\|_2^2 + u_{n+1}^2 ,$$

on a certainement

$$-\sqrt{1-\|\phi_n(x_1,\dots,x_n)\|_2^2} < u_{n+1} < +\sqrt{1-\|\phi_n(x_1,\dots,x_n)\|_2^2}$$

ce qui permet de trouver $x_{n+1} \in]-1,1[$ par la formule

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{1-(u_1^2+\cdots+u_n^2)}}$$

Par construction $\phi_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = u$.

Ainsi nous avons établi par récurrence que ϕ_n est une bijection de U_n vers V_n. Et la preuve nous a donné [2] une formule pour la réciproque ψ_n :

$$\psi_n(u) = \left(x_k = \frac{u_k}{\sqrt{1-\sum_{1\leqslant j<k} u_j^2}}, 1 \leqslant k \leqslant n\right)$$

1. me relisant : on doit tout de même vérifier qu'à chaque étape on peut propager $\|\phi_n\|_2 < 1$ sur U_n de n à $n+1$. Je vous en laisse la rédaction car il n'y a plus beaucoup de place.

2. on a prouvé la formule pour la dernière coordonnée, et comme le raisonnement montre que $\psi_{n+1}(u_1, \dots, u_{n+1})$ est de la forme $(\psi_n(u_1, \dots, u_n), x_{n+1})$ on en déduit par récurrence la formule donnée pour les autres coordonnées.

Il est clair sur cette formule que ψ_n est de classe C^∞. Donc ϕ_n est un C^∞ difféomorphisme de U_n sur V_n.

On a une formule explicite pour ψ_n, donnons aussi une formule explicite pour ϕ_n. Examinons d'abord les cas $n = 1, 2, 3$:

1. $x \mapsto x$,
2. $(x, y) \mapsto (x, y\sqrt{1-x^2})$,
3. $(x, y, z) \mapsto \left(x, y\sqrt{1-x^2}, z\sqrt{1-(x^2+y^2(1-x^2))}\right)$.

Une simplification « miraculeuse » se produit :

$$1-(x^2+y^2(1-x^2)) = (1-x^2)(1-y^2)$$

Donc $\phi_3(x, y, z) = (x, y\sqrt{1-x^2}, z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$. Voyons maintenant

$$\phi_4(x, y, z, t) = \left(\ldots, \ldots, \ldots, t\sqrt{1-x^2-y^2(1-x^2)-z^2(1-x^2)(1-y^2)}\right)$$

À nouveau le miracle :

$$1-x^2-y^2(1-x^2)-z^2(1-x^2)(1-y^2) = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$$

Donc

$$(x, y, z, t) \mapsto \left(x,\ y\sqrt{1-x^2},\ z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},\ t\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\ \right)$$

Montrons par récurrence sur n :

$$1-\|\phi_n(x_1, \ldots, x_n)\|_2^2 = (1-x_1^2)\ldots(1-x_n^2)$$

Vrai pour $n = 1$ (et on l'a vu ci-dessus pour $n = 2$ et $n = 3$). Si vrai pour n alors

$$1-\|\phi_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\|_2^2 = 1-\|\phi_n(x_1, \ldots, x_n)\|_2^2 - x_{n+1}^2(1-\|\phi_n(x_1, \ldots, x_n)\|_2^2)$$

ce qui donne $(1-\|\phi_n(x_1, \ldots, x_n)\|_2^2)(1-x_{n+1}^2)$ et donc la formule espérée.

Il en résulte donc (en appliquant ceci pour $n-1$) que la dernière coordonnée de $\phi_n(x_1, \ldots, x_n)$ est $x_n\prod_{1\leqslant j<n}\sqrt{1-x_j^2}$. Et donc ensuite par récurrence nous avons toutes les coordonnées antérieures :

$$(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \xrightarrow{\phi_n} \left(u_k = x_k \prod_{1\leqslant j<k} \sqrt{1-x_j^2}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

$$(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \xrightarrow{\psi_n} \left(x_k = \frac{u_k}{\sqrt{1-\sum_{1\leqslant j<k} u_j^2}}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

Jolies formules, non ?

Un brillant candidat s'était un peu emmêlé les pinceaux aujourd'hui en partant plutôt de l'homéomorphisme $x \mapsto \|x\|(\|x\|')^{-1}x$ entre la boule unité ouverte pour la norme $\|x\|$ et la boule unité ouverte pour la norme $\|x\|'$, avec $\|x\| = \|x\|_\infty$, $\|x\|' = \|x\|_2$ (à propos : quelle est la formule pour l'homéomorphisme réciproque ?). Mais c'est pas immédiat d'en tirer alors quelque chose de différentiable. Le candidat a voulu bidouiller sa formule au voisinage de l'origine, par des incantations de partition de l'unité assez foireuses, mais le pire c'est qu'il n'y a pas que l'origine qui pose problème.