Fractions rationnelles et règles de Bioche

Jean-François Burnol, 11 décembre 2014

Théorème 1. *Soit $R(X,Y)$ une fraction rationnelle et $f(x) = R(\sin x, \cos x)$.*

1. *si $f(x) = f(-x)$ (au moins pour $x \in I$ avec I d'intérieur non vide) alors il existe une fraction rationnelle $A \in \mathbb{C}(X)$ uniquement déterminée telle que $f(x) = A(\cos x)$,*
2. *si $f(x) = -f(-x)$, il existe une fraction rationnelle B unique avec $f(x) = \sin x \cdot B(\cos x)$,*
3. *si $f(\pi - x) = f(x)$, il existe C unique avec $f(x) = C(\sin x)$,*
4. *si $f(\pi - x) = -f(x)$, il existe D unique avec $f(x) = \cos x \cdot D(\sin x)$*
5. *si $f(\pi + x) = f(x)$, il existe E unique avec $f(x) = E(\operatorname{tg} x)$,*
6. *si $f(\pi + x) = -f(x)$, il existe F unique avec $f(x) = \sin x \cdot F(\operatorname{tg} x)$.*

Si f vérifie deux des conditions (2), (4), (5), *elle est de la forme* $\sin 2x \cdot G(\cos 2x)$ *avec G unique.*

Démonstration. Commençons par l'énoncé d'existence pour (1) : comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, tout polynôme en $\cos x$ et $\sin x$ peut se ramener à une forme $P(\cos x) + \sin x \cdot Q(\cos x)$ et par conséquent on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = \frac{P(\cos x) + \sin x \cdot Q(\cos x)}{A(\cos x) + \sin x \cdot B(\cos x)}$$

avec quatre polynômes P, Q, A, B. En multipliant par $A(\cos x) - \sin x \cdot B(\cos x)$ numérateur et dénominateur et en faisant usage à nouveau de $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient une autre forme :

$$f(x) = \frac{P_1(\cos x) + \sin x \cdot Q_1(\cos x)}{C_1(\cos x)}$$

avec trois polynômes P_1, Q_1, C_1. Soit donc :

$$f(x) = S(\cos x) + \sin x \cdot T(\cos x) \qquad \textbf{(I)}$$

avec S et T deux fractions rationnelles. Si $f(x) = f(-x)$ sur un intervalle (sans que nécessairement les $-x$ soient dans l'intervalle, d'ailleurs), c'est que $T(\cos x)$ est identiquement nul sur cet intervalle, donc (exercice) T est la fraction rationnelle nulle. De même si $f(x) = -f(-x)$, S est la fraction rationnelle nulle. Cela établit l'existence pour (1) et (2) (on peut aussi réduire (2) à (1) en remplaçant $f(x)$ par $f(x)/\sin x$).

L'unicité est laissée en exercice (comme les fractions rationnelles sont vues comme des éléments de $\mathbb{C}(X)$, A/B et AC/BC c'est la même chose).

On ramène (3) à (1) et (4) à (2) en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - y$.

Pour (5), partant de $R(\sin x, \cos x)$, on y remplace $\cos x = \sin x/\operatorname{tg} x$, donc on a une fraction rationnelle $R_1(\sin x, \operatorname{tg} x)$. Comme $\sin^2 x = 1/(1 + 1/\operatorname{tg}^2 x)$ on peut, de manière analogue à ce qu'on avait fait avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ramener toute fraction rationnelle $R_1(\sin x, \operatorname{tg} x)$ à la forme

$$f(x) = S(\operatorname{tg} x) + \sin x \cdot T(\operatorname{tg} x) \qquad \textbf{(II)}$$

Si $f(x + \pi) = f(x)$, c'est que $T(\operatorname{tg} x) = 0$ (pour un intervalle de x's) donc T est nulle et l'existence est montrée. L'unicité est laissée en exercise. Le (6) se voit à nouveau sur **(II)** ou se ramène à (5) en remplaçant $f(x)$ par $f(x)/\sin x$.

Pour le dernier énoncé, remarquons au passage (2) + (4) $\implies$ (5) : car $f(\pi + x) = f(\pi - (-x)) = -f(-x) = f(x)$, et similairement (2) + (5) $\implies$ (4) et (4) + (5) $\implies$ (2). Pour simplifier on a supposé que les relations sont vraies pour tous les x (autres que les pôles) ce qui résulte (exercice) de leurs validités à chacune sur un intervalle de valeurs de x. De (2) on a $f(x) = \sin x \cdot B(\cos x)$ puis de (4) on obtient $B(-\cos x) = -B(\cos x)$, donc (exo) $B(-X) = -B(X)$ donc (voir le Lemme plus loin) B est de la forme $XC(X^2)$. Ainsi $f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot C(\cos^2 x)$ ce que l'on peut mettre sous la forme $\sin 2x \cdot G(\cos 2x)$, car $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ et $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. □

Du point de vue du calcul de primitive $\int f(x)\,dx$, les cas (2) et (4) suggèrent de suite des changements de variables favorables : pour le premier (f impaire) poser $t = \cos x$, pour le second (f impaire pour $x \to \pi - x$) poser $t = \sin x$.

Le cas (5) (f est π-périodique) est aussi favorable : car $E(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-1} E(\operatorname{tg} x)\mathrm{d}(\operatorname{tg} x)$, donc $t = \operatorname{tg} x$ mène à l'intégration d'une fraction rationnelle en t.

Finalement si (2), (4), (5) sont simultanément vérifiés, on pourra faire le changement de variables $t = \cos 2x$ (f est impaire et π-périodique).

On a donc quatre règles de Bioche pour choisir un changement de variable plus simple que $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ (ce dernier aboutit dans tous les cas de figure.)

Cela suggère naturellement une cinquième règle, celle qui prédit quand le changement de variable en $t = \sin 2x$ va permettre l'intégration. La règle demande que deux des trois relations suivantes (donc aussi la troisième) soient vérifiées : $f(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$, $f(-\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$ et $f(x + \pi) = f(x)$.

Ceci se ramène à la quatrième règle de Bioche par $y = \frac{\pi}{4} - x$.

Tout cela étant dit, pour $\int \operatorname{tg}(x)\mathrm{d}x = -\log|\cos x| + C$ par exemple, utiliser $t = \cos(2x)$ (4$^{\text{e}}$ règle) plutôt que $t = \cos x$ (1$^{\text{re}}$ règle) semble moins rapide...

Lemme 1. *Si $R \in \mathbb{C}(X)$ est paire, elle est de la forme $S(X^2)$ avec $S \in \mathbb{C}(X)$, et si elle est impaire elle est de la forme $X \cdot T(X^2)$ avec $T \in \mathbb{C}(X)$.*

Démonstration. $R(X) = (A(X^2) + XB(X^2))/(C(X^2) + XD(X^2))$ avec quatre polynômes A, B, C, D. On multiple en haut et en bas par $C(X^2) - XD(X^2)$ et on aboutit à $R(X) = S(X^2) + XT(X^2)$ avec $S, T \in \mathbb{C}(X)$. Si R est paire T est nulle, et si R est impaire c'est S qui est nécessairement nulle. □

Challenge : toute $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ s'écrit de manière unique $A(\cos 2x) + \cos x \cdot B(\cos 2x) + \sin x \cdot C(\cos 2x) + \sin x \cdot \cos x \cdot D(\cos 2x)$ avec A, B, C, $D \in \mathbb{C}(X)$.