Convergence des sommes de Darboux et de Riemann

Jean-François Burnol, 27 novembre 2014

On a une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, qui est supposée **bornée**. Une subdivision Δ est un choix de $(x_0, x_1, \cdots, x_N)$, avec $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_N = b$. Pour des raisons techniques, on autorise donc $x_k = x_{k+1}$. Le pas $\sigma(\Delta)$ est $\max_k(x_k - x_{k-1})$.

Darboux définit les sommes de Darboux supérieure $\mathcal{S}^\Delta$ et inférieure $\mathcal{S}_\Delta$:

$$\mathcal{S}^\Delta = \sum_{1\leqslant k\leqslant N} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \tag{1}$$

$$\mathcal{S}_\Delta = \sum_{1\leqslant k\leqslant N} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \tag{2}$$

Parmi les premiers lemmes cruciaux, l'observation suivante : supposons que la subdivision Δ_2 soit plus fine que Δ_1 au sens de contenir tous ses points et d'autres. Alors :

$$\mathcal{S}_{\Delta_1} \leqslant \mathcal{S}_{\Delta_2} \leqslant \mathcal{S}^{\Delta_2} \leqslant \mathcal{S}^{\Delta_1} \tag{3}$$

La démonstration se fait en ajoutant un point à la fois (voir plus loin).

Donc, si maintenant on a deux subdivisions Δ_1 et Δ_2 quelconques et qu'on les réunit en une seule notée Δ_3, on aura $\mathcal{S}_{\Delta_1} \leqslant \mathcal{S}_{\Delta_3} \leqslant \mathcal{S}^{\Delta_3} \leqslant \mathcal{S}^{\Delta_2}$. Donc :

$$\forall \Delta_1, \Delta_2 \quad \mathcal{S}_{\Delta_1} \leqslant \mathcal{S}^{\Delta_2} \tag{4}$$

Ainsi on peut définir $I_* = \sup_\Delta \mathcal{S}_\Delta$ et $I^* = \inf_\Delta \mathcal{S}^\Delta$ et on a :

$$\forall \Delta \quad \mathcal{S}_\Delta \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant \mathcal{S}^\Delta \tag{5}$$

La fonction est dite intégrable au sens de Riemann si $I_* = I^*$. Je fais cette note pour expliquer le résultat essentiel suivant :

Théorème 1 *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Soit Δ_n une suite de subdivisions de pas $\sigma(\Delta_n) \to 0$, alors*

$$\lim S_{\Delta_n} = I_* \quad \text{et} \quad \lim S^{\Delta_n} = I^*$$

Pour obtenir ce résultat, il faut revenir à (3), de manière plus quantitative. Supposons qu'on parte d'une subdivision Δ_1 et qu'on lui rajoute un point $x \in]a, b[$ pour faire une nouvelle subdivision Δ_2. Soit k le plus grand indice avec $x_k \leqslant x$. Donc $x_k \leqslant x < x_{k+1}$. On note au passage qu'on peut aussi prendre $x = a$ ou $x = b$ (mais alors $k = N$), dans ce cas les sommes de Darboux sont bien sûr inchangées, donc la conclusion de ce qui suit sera aussi valable.

Considérons la différence :

$$S^{\Delta_1} - S^{\Delta_2} = (x_{k+1} - x_k) \sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t) - \Big((x_{k+1} - x) \sup_{t\in[x,x_{k+1}]} f(t) + (x - x_k) \sup_{t\in[x_k,x]} f(t)\Big)$$

C'est un nombre positif ou nul. On veut le majorer. Il y a trois «sup», celui sur tout l'intervalle coïncide nécessairement avec l'un des deux calculés sur les sous-intervalles. Mais l'autre, on ne saura rien sur lui, si ce n'est qu'il est minoré par $\inf f$ sur ce sous-intervalle. Passons à l'action : le grand terme entre parenthèses est au minimum égal à $(x_{k+1} - x_k) \inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$. Ainsi :

$$0 \leqslant S^{\Delta_1} - S^{\Delta_2} \leqslant (x_{k+1} - x_k)(\sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t) - \inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)) \leqslant \sigma(\Delta_1) \cdot C$$

On a noté $C = \sup f - \inf f$, les extremas calculés sur $[a, b]$ ne dépendent que de f.

C'est l'inégalité clé, elle dit qu'en ajoutant un point la somme de Darboux supérieure ne peut pas décroître de plus que le pas de la subdivision fois cette constante C.

J'en viens au Théorème. Soit $\epsilon > 0$. Je choisis une subdivision Δ avec $S^{\Delta} \leqslant I^* + \epsilon$. Elle comporte $N + 1$ points (y-compris a et b). Si je prends Δ_n et que je lui rajoute les au plus $N - 1$ points de Δ autres que a et b, j'obtiens une subdivision Δ'_n qui est plus fine que Δ donc

$$I^* \leqslant S^{\Delta'_n} \leqslant I^* + \epsilon$$

mais qui est aussi plus fine que Δ_n n'en différant que par au plus $N - 1$ ajouts d'un point, donc

$$S^{\Delta_n} - S^{\Delta'_n} \leqslant N\sigma(\Delta_n) \cdot C$$

Petite remarque : on a fait une récurrence en disant au passage que les pas ne font que diminuer dans le passage de Δ_n à Δ'_n. Conclusion :

$$I^* \leqslant S^{\Delta_n} \leqslant I^* + \epsilon + N\sigma(\Delta_n) \cdot C$$

Notez bien que N provient de Δ et n'a rien à voir avec les Δ_n !

Si n est suffisamment grand $N\sigma(\Delta_n) \cdot C \leqslant \epsilon$ et $I^* \leqslant S^{\Delta_n} \leqslant I^* + 2\epsilon$ ce qui termine la preuve pour les sommes de Darboux supérieures.

Soit on recommence pour les inférieures, soit on remplace f par $-f$.

Toute somme de Riemann $\sum_{1\leqslant k\leqslant N}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ étant coincée entre les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la subdivision, on conclut : si

1. les pas tendent vers zéro,
2. et la fonction est Riemann intégrable,

alors les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale de Riemann.

Riemann définissait l'intégrabilité comme le fait de l'existence d'une limite commune pour toutes les sommes de Riemann, lorsque le pas tend vers zéro.

Il n'y a pas d'ambiguïté possible pour ce qu'on veut dire par limite, d'après notre preuve même, mais je n'ai pas vraiment la place d'expliquer ce que je veux dire, même si j'ai étiré la page pour y glisser cette note.