Une intégrale de Gauss

Jean-François Burnol, novembre 2008
(version du lundi 24 novembre 2014)

Soient $a > 0$ et $b > 0$ et

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} \tag{1}$$

On voit d'abord que les changements de variables $x \mapsto \lambda x$ et aussi $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont pas totalement absurdes, surtout si on est prêt à varier a et b. Donc regardons le changement de variable $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$. On obtient :

$$I = \int_0^\infty \frac{\lambda}{ab} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+(\frac{\lambda}{a})^2)(x^2+(\frac{\lambda}{b})^2)}} \tag{2}$$

Ainsi $\lambda = ab$ est particulièrement intéressant, puisque l'on retrouve la forme de départ. La transformation $x \mapsto \frac{ab}{x}$ échange $]0, \sqrt{ab}[$ et $]\sqrt{ab}, \infty[$, donc en reprenant le calcul, on a en fait :

$$I = 2\int_{\sqrt{ab}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} \tag{3}$$

Il est temps de manipuler les sommes de deux carrés :

$$(x^2+a^2)(x^2+b^2) = (x+ia)(x-ia)(x+ib)(x-ib) \tag{4a}$$

$$= (x+ia)(x+ib)(x-ia)(x-ib) \tag{4b}$$

$$= (x^2-ab+i(a+b)x)(x^2-ab-i(a+b)x) \tag{4c}$$

$$= (x^2-ab)^2+(a+b)^2x^2 \tag{4d}$$

Ceci est intéressant car x^2-ab nous ramène à $]0,\infty[$ à partir de $]\sqrt{ab},\infty[$. Cependant le changement de variable $y^2 = x^2 - ab$ ne mène pas (après calcul) à une forme manifestement simple. Regardant à nouveau notre somme de carrés, on tente donc le changement de variable :

$$y = \frac{1}{2}(x - \frac{ab}{x}) \tag{5}$$

Lorsque x varie de $\sqrt{ab}$ à $+\infty$, y va de 0 à $+\infty$. Le facteur $\frac{1}{2}$ est justifié par les calculs ultérieurs. Il suffit maintenant de calculer, tout d'abord $dy = \frac{1}{2}(1+\frac{ab}{x^2})\mathrm{d}x$, puis :

$$I = 2\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{4y^2+(a+b)^2}} \frac{2dy}{1+\frac{ab}{x^2}} \tag{6}$$

On remarque que

$$(x+\frac{ab}{x})^2=(x-\frac{ab}{x})^2+4ab=4(y^2+ab)\ , \tag{7}$$

et finalement :

$$I=\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{1}{4}(a+b)^2}\,\sqrt{y^2+ab}} \tag{8}$$

D'où le célèbre résultat de Gauss :

$$I(a,b)=I(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}) \tag{9}$$

Avec $a_1=a$ et $b_1=b$, et $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, on prouve qu'il y a une limite commune $M(a,b)$, la moyenne arithmético-géométrique. On justifiera alors :

$$I(a,b)=I(a_n,b_n)=I(M(a,b),M(a,b))=\frac{\pi}{2M(a,b)} \tag{10}$$

Autrement dit

$$\frac{\pi}{2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}}$$

est la moyenne arithmético-géométrique de a et de b. Le procédé itératif définissant $M(a,b)$ comme limite de suites adjacentes converge très vite.