Université Lille 1 – Licence, semestre 1 – Atelier Mathématiques

Fiche 6 : CONSTRUCTION DES NOMBRES RÉELS PAR LES COUPURES DE DEDEKIND

Nous avons vu qu'aucun nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ ne pouvait être de carré 2, ou 5, etc... la géométrie via le théorème de Pythagore semble pourtant indiquer qu'il doit exister de tels nombres ; plus généralement on s'attend à pouvoir extraire des racines cubiques, n-ièmes, et donc on devrait pouvoir définir pour chaque $t = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ un 10^t par exemple (la racine b-ième de 10^a). Même si on y arrivait, on a vu aussi que l'équation $10^t = 2$ ne pouvait pas avoir de solution rationnelle.

Bref, il n'y a pas assez de choses dans $\mathbb{Q}$. La façon la plus simple de comprendre ce qui est manquant est de considérer la notion d'« écriture décimale avec les chiffres après la virgule ». Vous connaissez probablement : « pour tout $x \in \mathbb{Q}$ son écriture décimale positionnelle $\pm a_n \cdots a_1, b_1 b_2 b_3 \cdots$ est ultimement périodique. » Donc il suffit de retirer cette contrainte de périodicité et on devrait avoir les nombres qui nous manquent. ← Ex. 1.

Beau programme, mais comment alors construire (sérieusement) l'addition, la multiplication, la division de tels nombres ? comment montrer que $\sqrt{2}$ existe dans un tel système ?

D'autres approches existent, dont celle des « coupures » de Dedekind. [1] Le but de cette fiche est de l'exposer brièvement, mais ce n'est qu'une première étape dans un plan grandiose :

1. élargissement de $\mathbb{Q}$ par les coupures de Dedekind et vérification que l'on peut étendre à ces coupures inégalités, additions, multiplications, divisions avec les propriétés habituelles vérifiées pour les nombres rationnels,
2. associer à toute coupure (dorénavant appelée « nombre réel ») son écriture décimale et réciproquement,
3. prouver les théorèmes fondamentaux sur les suites et limites de nombres réels, théorèmes sur lesquels repose toute l'Analyse mathématique.

Il faudrait un petit livre pour mener à bien intégralement et de manière satisfaisante ce programme ; et puis il y a les cours de mathématiques que vous suivez par ailleurs au cours de cette année. Vos enseignants n'auront peut-être pas le temps cependant de se consacrer pleinement à tous les détails nécessaires ; [2] et il est toujours délicat pour les enseignants de faire des exercices sur la construction même du langage des futurs exercices et examens… l'exercice seul et unique est de réfléchir par soi-même à la construction et de se convaincre plus ou moins totalement qu'elle est valable ; donc ici il s'agit d'un exercice de logique mathématique, de maîtrise de choses simples comme les inégalités et de choses moins simples comme le raisonnement et son exposé, ce qui est dit et ce qui est non-dit.

Car jamais rien n'est « totalement » dit : ceci est un mythe, très courant chez les mathématiciens, de penser le contraire, de penser qu'on peut *tout* dire. Pour une large partie, c'est en fait le lecteur qui construit son propre discours, même en mathématiques. J'ai précisément ce problème ici : un texte ne disant certes pas encore tout, mais beaucoup, serait non seulement très long, mais en plus je suis sûr qu'il ne serait pas encore assez détaillé. Et cette fiche, concise, est cependant déjà un peu longue pour ne pas effrayer. ← Ex. 2. y réfléchir.

Par conséquent je parsemerai le texte de petits renvois « Ex. n » à chaque fois que quelque chose de vraiment important se passe et que l'on n'a pas entièrement vérifié explicitement ; vous êtes censés alors réfléchir à ce qu'on affirme, et chercher à le valider.

---

1. RICHARD DEDEKIND, 1831–1916.
2. Une autre construction des nombres réels est due à CANTOR (1845–1918), et repose sur la notion de *suites de Cauchy*. Cette notion est fondamentale, mais débuter par elle m'a toujours semblé un peu étrange. De toute façon je n'ai jamais vu les gens vérifier explicitement toutes les propriétés de l'addition, la multiplication, la division, des inégalités ; car à ce stade de sophistication mathématique on considère à juste titre que ce n'est pas au rédacteur mais au lecteur de le faire. Quelle que soit la méthode il est en fait extrêmement fastidieux de tout vérifier, et cette fiche n'échappera pas à cette malédiction commune.

Je n'ai pas l'intention de vous faire plus tard réciter par coeur le bidule ; mais si vous faites ces exercices vous améliorerez votre capacité à raisonner et surtout à vous exprimer en mathématiques, et c'est cela l'objectif principal de ces Ateliers.

On désigne par « coupure de $\mathbb{Q}$ » la donnée de deux ensembles $A \subset \mathbb{Q}$ et $B \subset \mathbb{Q}$ vérifiant :

(0) chacun de A et B est non vide,

(1) $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a < b$,

(2) $\forall a \in A, \forall q \in \mathbb{Q}, \quad q \leqslant a \implies q \in A$,

(3) $\forall b \in B, \forall q \in \mathbb{Q}, \quad q \geqslant b \implies q \in B$,

(4) A ne contient pas d'élément plus grand que tous les autres et B ne contient pas d'élément plus petit que tous les autres, ← Ex. 3. avec des quantificateurs ?

(5) les différences $b - a$ peuvent être rendues arbitrairement petites en choisissant convenablement $a \in A$, et $b \in B$. ← Ex. 4. idem.

Tout rationnel $x \in \mathbb{Q}$ définit une coupure : $A_x = \{q,\ q < x\}$, $B_x = \{q, q > x\}$. Dans ce cas $A_x \cup B_x$ est $\mathbb{Q}$ privé d'un unique élément, à savoir le x en question (donc les coupures associées à deux rationnels distincts ne peuvent être identiques). Réciproquement, si une coupure (A, B) est telle que $\mathbb{Q} \setminus (A \cup B)$ contient un élément, alors il n'en contient qu'un seul, x, et $A = A_x$, $B = B_x$. ← Ex. 5. ← Ex. 6.

Il existe des coupures qui sont telles que $A \cup B = \mathbb{Q}$: prenons $A = \mathbb{Q}^- \cup \{a \geqslant 0, a^2 < 2\}$, $B = \{b > 0, b^2 > 2\}$. Les points (0), (1), (2), (3), sont relativement faciles. Il est moins simple de montrer (4) et (5) : ← Ex. 7.

(4) si $a \in A$ est inférieur à 0, il n'est pas plus grand que tous les autres. Si $a > 0$ est dans A, posons $a' = a + u$, avec $0 < u < 1$, alors $a'^2 = a^2 + u(2a + u) < a^2 + (2a + 1)u$. Comme $a^2 < 2$, si u est suffisamment petit on a encore $a^2 + (2a+1)u < 2$. Donc $a' \in A$ et a n'était pas le plus grand. Idem pour B. ← Ex. 8.

(5) soit N un entier, et soit M le plus grand entier avec $M^2 < 2 \cdot 10^{2N}$. Donc $(M+1)^2 \geqslant 2 \cdot 10^{2N}$. En fait l'inégalité est stricte car on sait que 2 n'est pas le carré d'un nombre rationnel. Posons $a = M \cdot 10^{-N}$ et $b = (M + 1) \cdot 10^{-N}$. Alors $a \in A$, $b \in B$ et $b - a = 10^{-N}$ peut être rendu arbitrairement petit en choisissant N suffisamment grand.

Lorsque $A \cup B = \mathbb{Q}$ on dit que la coupure $c = (A, B)$ est irrationnelle. Sinon $c = (\{a < q\}, \{b > q\})$ pour un $q \in \mathbb{Q}$ unique, on notera $c = c(q)$, $A = A_q$, $B = B_q$.

On va maintenant définir une addition $\oplus$ et une multiplication $\otimes$ pour les coupures. Les propriétés $c(q) \oplus c(q') = c(q+q')$ et $c(q) \otimes c(q') = c(qq')$ seront valables ; de plus toutes les règles habituelles seront vérifiées : commutativité, associativité, comportement vis-à-vis des inégalités, distributivité, éléments neutres, opposés, inverses... l'ensemble des coupures formera donc alors ce qu'on appelle un *corps*,[3] et on appellera dorénavant « nombre réel » une coupure (rationnelle ou non). Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ contient comme sous-ensemble les coupures rationnelles, sous-ensemble que l'on identifiera avec $\mathbb{Q}$, et modulo ce petit tour de passe-passe on écrira sans remords $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Égalité : pour tester que deux coupures $c_1 = (A_1, B_1)$ et $c_2 = (A_2, B_2)$ sont identiques je dis qu'il suffit de vérifier $A_1 = A_2$. Considérons les différents cas :

1. $c_1 = c(q_1)$ et $c_2 = c(q_2)$ sont toutes les deux rationnelles. Si $q_1 > q_2$ alors il existe q avec $q_2 < q < q_1$; alors $q \in A_1$ mais $q \notin A_2$, contradiction. De même $q_2 > q_1$ est impossible donc $q_1 = q_2$ et $c_1 = c_2$.

---

3. totalement ordonné.

2. $c_1 = c(q)$ est rationnelle et c_2 est irrationnelle. Comme $q \notin A_1$ on a aussi $q \notin A_2$ donc $q \in B_2$. Comme tout b de B_1 vérifie $b > q$ il est aussi dans B_2. Donc B_2 contient B_1. Comme B_2 ne contient aucun élément de $A_2 = A_1$, soit $B_2 = B_1$ soit $B_2 = B_1 \cup \{q\}$. Mais dans ce dernier cas q serait un plus petit élément de B_2 ce qui est interdit. Donc $B_2 = B_1$ et $c_2 = c_1$. Ce cas ne peut pas arriver car c_2 est irrationnelle. ← Ex. 9. vous comprenez quelque chose ?
3. c_2 est rationnelle et c_1 est irrationnelle. On inverse les rôles et on est ramené au cas précédent qui montre que c'est impossible.
4. c_1 et c_2 sont toutes les deux irrationnelles. Mais alors $B_1 = \mathbb{Q} \setminus A_1$ et $B_2 = \mathbb{Q} \setminus A_2$ et comme $A_1 = A_2$ on a $B_1 = B_2$.

De même il suffit de s'assurer que $B_1 = B_2$ pour montrer $c_1 = c_2$. ← Ex. 10.

Inégalités. Soit $c_1 = (A_1, B_1)$ et $c_2 = (A_2, B_2)$ deux coupures. Alors soit $A_1 \subset A_2$, soit $A_1 \supset A_2$.

En effet si l'inclusion $A_1 \subset A_2$ est fausse, il existe $a_1 \in A_1$ qui n'est pas dans A_2. Pour $a_2 \in A_2$, il est exclu que $a_1 \leqslant a_2$ car cela impliquerait par la propriété (2) pour A_2 que $a_1 \in A_2$. Donc tous les a_2 de A_2 vérifient $a_2 < a_1$. Et $a_2 \in A_1$ par (2) pour A_1. Donc $A_2 \subset A_1$.

Donc soit $A_1 \subset A_2$ soit $A_2 \subset A_1$. Si les deux sont vrais simultanément alors $A_1 = A_2$.

On notera $c_1 \leqslant c_2$ si $A_1 \subset A_2$ et $c_1 \geqslant c_2$ si $A_1 \supset A_2$. Il est alors vrai que $c_1 \leqslant c_2$ si $B_1 \supset B_2$ et que $c_1 \geqslant c_2$ si $B_1 \subset B_2$. On dit qu'une coupure $c = (A, B)$ est positive si $c \geqslant c(0)$, négative si $c \leqslant c(0)$. Elle est strictement positive et seulement si $0 \in A$; elle est strictement négative si et seulement si $0 \in B$. ← Ex. 11. ← Ex. 12.

Additions. Si $c = (A, B)$ et $c' = (A', B')$ est une coupure, on pose $\mathscr{A} = \{a + a',\ a \in A,\ a' \in A'\}$ et $\mathscr{B} = \{b + b',\ b \in B,\ b' \in B'\}$. Vérifions que $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est une coupure.

(0) $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont non vides,

(1) tout élément de $\mathscr{A}$ est strictement inférieur à tout élément de $\mathscr{B}$: ok, ← Ex. 13.

(2) si $q \leqslant r$ avec $r \in \mathscr{A}$, alors on écrit $r = a + a'$. Donc $q \leqslant a + a'$, et on a $q = (a - (a + a' - q)) + a'$. Or $a + a' - q \geqslant 0$, donc $a - (a + a' - q) \leqslant a$, donc $a - (a + a' - q) \in A$. Par conséquent $q \in \mathscr{A}$. ← Ex. 14. vérifier !

(3) on fait comme au point précédent. ← Ex. 15.

(4) si $q = a_1 + a_1'$ est un élément de $\mathscr{A}$, alors il existe $a_2 > a_1$ dans A et $a_2' > a_1'$ dans A' donc $q < a_2 + a_2'$ n'est pas le plus grand élément de $\mathscr{A}$. Idem pour $\mathscr{B}$. ← Ex. 16.

(5) facile ? ← Ex. 17.

On notera cette coupure $c \oplus c'$.

On a : ← Ex. 18. Il s'agit de tout faire en exercice !

— commutativité,

— associativité,

— $c(0)$ comme élément neutre,

— si $c = (A, B)$ on définit son opposé $-c$ par $-c = (\{-b, b \in B\}, \{-a, a \in A\})$. Alors $c \oplus (-c) = c(0)$.

Et, *surtout*, pour deux nombres rationnels quelconques, $\boxed{c(q + q') = c(q) \oplus c(q')}$. ← Ex. 19.

Inégalités et addition. On a le comportement habituel de l'addition vis-à-vis des inégalités ← Ex. 20. encore un…

$$(c_1 \leqslant c_2) \text{ et } (d_1 \leqslant d_2) \Longrightarrow \quad c_1 \oplus d_1 \leqslant c_2 \oplus d_2$$
$$c_1 \leqslant c_2 \Longrightarrow \quad -c_1 \geqslant -c_2$$

Multiplications. On définit d'abord la multiplication de deux coupures $c = (\mathrm{A},\mathrm{B})$ et $c' = (\mathrm{A}',\mathrm{B}')$ strictement positives. Attention au gros piège : prendre $\mathscr{A} = \{aa', a \in \mathrm{A}, a' \in \mathrm{A}'\}$ et $\mathscr{B} = \{bb', b \in \mathrm{B}, b' \in \mathrm{B}'\}$ ne fonctionne pas à cause des $a < 0$. ← Ex. 21. expliquer

Plutôt, il faut prendre $\mathscr{A} = \{aa', a \in \mathrm{A}^+, a' \in \mathrm{A}'^+\} \cup]-\infty, 0]$, $\mathscr{B} = \{bb', b \in \mathrm{B}, b' \in \mathrm{B}'\}$. Pour la définition de $\mathscr{B}$ seuls des nombres rationnels strictement positifs sont intervenus. On peut vérifier tous les points :

(0) $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont non vides (car il existe $a > 0$ dans A, $a' > 0$ dans A′),

(1) tout élément de $\mathscr{A}$ est strictement inférieur à tout élément de $\mathscr{B}$. Si l'élément de $\mathscr{A}$ en question est négatif ou nul, c'est vrai ; sinon il est de la forme aa', $a > 0$, $a' > 0$. Or $0 < a < b$ et $0 < a' < b'$ impliquent $aa' < bb'$.

(2) si $q \leqslant r$ avec $r \in \mathscr{A}$, si $q \leqslant 0$ il est dans $\mathscr{A}$, sinon on a donc $0 < q \leqslant aa'$ avec $a > 0$, $a' > 0$. Donc $q = (a/(aa'/q))a'$. Or $aa'/q \geqslant 1$, donc $a/(aa'/q)$ est dans A (car $a \geqslant 0\ldots$). Par conséquent q est bien dans $\mathscr{A}$.

(3) on fait comme au point précédent. ← Ex. 22.

(4) si q est un élément négatif de $\mathscr{A}$ il ne peut être un plus grand élément. Si $q > 0$ il est de la forme $q = a_1 a_1'$, et il existe $a_2 > a_1$ dans A et $a_2' > a_1'$ dans A′ ainsi $q < a_2 a_2'$ et n'est donc pas le plus grand élément de $\mathscr{A}$. Idem pour $\mathscr{B}$. ← Ex. 23.

(5) facile ? ← Ex. 24. pas **du tout** facile, mais instructif

On établit ensuite la commutativité $c \otimes c' = c' \otimes c$ et l'associativité $c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3) = (c_1 \otimes c_2) \otimes c_3$ de la multiplication ainsi définie sur les coupures strictement positives. ← Ex. 25. beaucoup d'exercices…

Il faut ensuite étendre à toutes les coupures en posant $c(0) \otimes c = c \otimes c(0) = c(0)$ et, pour le produit de deux coupures non nulles :

$$c \otimes c' = \begin{cases} -(-c \otimes c') & c < c(0), c' > c(0) \\ -(c \otimes (-c')) & c > c(0), c' < c(0) \\ (-c) \otimes (-c') & c < c(0), c' < c(0) \end{cases}$$

La commutativité et l'associativité valent alors dans tous les cas. La coupure nulle $c(0)$ sert d'élément absorbant : $c(0) \otimes c = c \otimes c(0) = c(0)$. La coupure $c(1)$ sert d'élément neutre. ← Ex. 26. pas difficile

Et, *surtout*, pour deux nombres rationnels quelconques $\boxed{c(q) \otimes c(q') = c(qq')}$. ← Ex. 27.

Inégalités et multiplications. Ici encore les règles habituelles fonctionnent.

Supposons $0 < c_1 \leqslant c_2$ et que c est une coupure strictement positive. L'ensemble $\mathrm{B}(c \otimes c_2)$ est par définition l'ensemble des bb_2 avec $b \in \mathrm{B}(c)$, $b_2 \in \mathrm{B}(c_2)$. Or tout tel b_2 est aussi dans $\mathrm{B}(c_1)$ donc bb_2 est dans $\mathrm{B}(c \otimes c_1)$. Donc $\mathrm{B}(c \otimes c_2) \subset \mathrm{B}(c \otimes c_1)$ et ainsi $c \otimes c_1 \leqslant c \otimes c_2$.

Supposons $c_1 \leqslant 0 \leqslant c_2$. Alors $c \otimes c_1$ est négative et $c \otimes c_2$ est positive.

Finalement supposons $c_1 \leqslant c_2 < 0$. Alors on passant aux opposés $0 < -c_2 \leqslant -c_1$ donc par ce qui a déjà été montré, $0 < c \otimes (-c_2) \leqslant c \otimes (-c_1)$ et ainsi $0 < -c \otimes c_2 \leqslant -c \otimes c_1$, $c \otimes c_1 \leqslant c \otimes c_2 < 0$.

Dans le cas où c est une coupure négative, la multiplication par c renverse les inégalités. ← Ex. 28.

Multiplication par une coupure rationnelle. Lorsque $q > 0$ et $c = (\mathrm{A},\mathrm{B})$ est une coupure quelconque alors $c(q) \otimes c$ est la coupure avec ensemble A égal à $\{qa, a \in \mathrm{A}\}$ et ensemble B égal à $\{qb, b \in \mathrm{B}\}$. De même lorsque $q < 0$ alors $c(q) \otimes c$ est la coupure avec ensemble A égal à $\{qb, b \in \mathrm{B}\}$ et ensemble B égal à $\{qa, a \in \mathrm{A}\}$. On notera en particulier comme conséquence de ces descriptions $c(1) \otimes c = c$, $c(-1) \otimes c = -c$ (le deuxième membre est l'opposé pour l'addition, défini précédemment). ← Ex. 29. Encore un excellent exercice.

Distributivité de la multiplication sur l'addition. C'est la propriété fondamentale

$$c \otimes (d_1 \oplus d_2) = (c \otimes d_1) \oplus (c \otimes d_2)$$

Supposons que les trois coupures c, d_1, d_2 soient strictement positives. Par définition, l'ensemble B de la coupure $c \otimes (d_1 \oplus d_2)$ est composé des nombres rationnels de la forme $b(b_1 + b_2)$, $b \in \mathrm{B}(c)$, $b_1 \in \mathrm{B}(d_1)$, $b_2 \in \mathrm{B}(d_2)$. Tandis que celui de la coupure de droite est composé des nombres rationnels de la forme $bb_1 + b'b_2$ avec $b \in \mathrm{B}(c)$, $b' \in \mathrm{B}(c)$, $b_1 \in \mathrm{B}(d_1)$, $b_2 \in \mathrm{B}(d_2)$. Il contient donc le précédent. Réciproquement regardons $bb_1 + b'b_2$ et supposons $b' \geqslant b$. Alors $bb_1 + b'b_2 \geqslant b(b_1 + b_2)$ (tous les nombres ici sont strictement positifs). Comme $b(b_1 + b_2) \in \mathrm{B}(c \otimes (d_1 \oplus d_2))$ il en est de même de $bb_1 + b'b_2$. On raisonne de même si $b' \leqslant b$. Au final les deux coupures $c \otimes (d_1 \oplus d_2)$ et $(c \otimes d_1) \oplus (c \otimes d_2)$ ont le même ensemble B et sont donc identiques.

Supposons seulement que c est une coupure strictement positive.

Si l'un de d_1 ou d_2 est la coupure nulle, ou si $d_1 \oplus d_2 = c(0)$ la propriété est facile à vérifier. On les supposera donc toutes les deux non nulles. On a déjà traité le cas avec les deux positives. La cas avec les deux négatives s'y ramène en passant aux opposés. Reste le cas délicat avec l'une positive, par exemple d_1 et l'autre négative, donc $d_2 = -e_2$ avec e_2 positive. On a laissé plus haut en exercice $d_2 = -d_1$; ainsi soit $e_2 < d_1$, soit $e_2 > d_1$. Traitons le premier cas en utilisant ce qui est déjà prouvé :

← Ex. 30.

← Ex. 31.

$$\begin{aligned}
&\big(c \otimes (d_1 \oplus d_2)\big) \oplus (c \otimes e_2) = c \otimes ((d_1 \oplus d_2) \oplus e_2) = c \otimes d_1 \\
&\quad c \otimes (d_1 \oplus d_2) \oplus (-c \otimes d_2) = c \otimes d_1 \\
&\quad c \otimes (d_1 \oplus d_2) \oplus (-c \otimes d_2) \oplus (c \otimes d_2) = (c \otimes d_1) \oplus (c \otimes d_2) \\
&\quad c \otimes (d_1 \oplus d_2) = (c \otimes d_1) \oplus (c \otimes d_2)
\end{aligned}$$

Le case $d_1 < e_2$ est laissé en exercice.

Il ne reste plus qu'à faire avec c une coupure nulle ou strictement négative.

← Ex. 32. qui l'eût cru ? exercice !

Inverse multiplicatif. Soit $c = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ une coupure strictement positive. Considérons $\mathrm{A}' =]-\infty, 0] \cup \{1/b, b \in \mathrm{B}\}$, et $\mathrm{B}' = \{1/a, a \in \mathrm{A}, a > 0\}$. Alors $d = (\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ est une coupure et $c \otimes d = c(1)$. Je laisse ceci en exercice ainsi que le cas des coupures strictement négatives.

← Ex. 33.

Divisions. Le professeur est épuisé, là.

← Ex. 34. à vous de jouer.

Valeur absolue. On note $|c| = c$ si $c > c(0)$, $|c(0)| = c(0)$, $|c| = -c$ si $c < c(0)$. Cela correspond à la notion usuelle sur les rationnels et $\boxed{\forall c,\ |c| \geqslant c(0)}$, $\boxed{\forall c, \forall d,\ |c + d| \leqslant |c| + |d|}$.

← Ex. 35.

Dorénavant on note $\mathbb{R}$ l'ensemble de toutes les coupures et on le considère comme un sur-corps de $\mathbb{Q}$, c'est à dire la coupure $c(q)$ est juste notée q. Le théorème suivant est essentiel :

> Soit (x_n) une suite croissante $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots$ et majorée : $\exists \mathrm{C}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant \mathrm{C}$. Alors cette suite possède une limite (unique) x, c'est-à-dire un nombre réel x tel que pour tout entier M, si n est suffisamment grand alors $|x_n - x| \leqslant \mathrm{M}^{-1}$.

Démonstration. Considérons les ensembles $A_n = A(x_n) \subset \mathbb{Q}$ associés. On a les inclusions $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ et tous sont inclus dans A(C). De même $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ et tous contiennent B(C). Définissons $\mathscr{A}$ comme l'union de tous les A_n. C'est un ensemble non vide, de complémentaire non vide. Si a est dans $\mathscr{A}$ et $q \leqslant a$, alors a est dans l'un des A_n donc q est dans ce A_n donc q est dans $\mathscr{A}$.

Montrons que $\mathscr{A}$ ne possède pas de plus grand élément. Si $a \in \mathscr{A}$ il appartient à l'un des A_n et n'est déjà pas le plus grand là-dedans, donc a fortiori dans $\mathscr{A}$.

Considérons un nombre rationnel r qui n'est pas dans $\mathscr{A}$. Alors pour tout n on a $r \notin A_n$, c'est-à-dire, pour tout n on a $r \geqslant x_n$. Il en résulte que si $s \geqslant r$ alors aussi $s \geqslant x_n$ pour tous les n et ce s n'est donc pas dans $\mathscr{A}$ non plus.

Soit à nouveau $b \notin \mathscr{A}$. Si $a \in \mathscr{A}$ il est dans l'un des A_n mais b lui n'y est pas donc $b > a$. On voit donc qu'en posant $\mathscr{B} = \mathbb{Q} \setminus \mathscr{A}$ on a un ensemble non vide avec $\forall b \in \mathscr{B}, \forall a \in \mathscr{A}, b > a$, et $\forall b \in \mathscr{B}, \forall r \in \mathbb{Q}, r \geqslant b \implies r \in \mathscr{B}$.

Supposons que les $b - a$, $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{B}$ soient minorés par une constante $E > 0$. Prenons donc un couple (a, b) on a $b - a \geqslant E$. Soit $q = \frac{a+b}{2}$ leur moyenne. Soit q est dans $\mathscr{A}$ soit il est dans son complémentaire $\mathscr{B}$. Dans le premier cas on remplace a par q et dans le deuxième c'est b qu'on remplace par q. La quantité $b-a$ a été divisée par deux. En itérant un nombre fini de fois on contredira $b-a \geqslant E$. Les quantités $b-a$ ne sont ainsi pas limitées inférieurement par un nombre rationnel strictement positif.

En combinant tout il n'y a que deux cas de figure : 1. si $\mathscr{B}$ ne possède pas de plus petit élément alors $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est une coupure, 2. si $\mathscr{B}$ possède un plus petit élément $q \in \mathbb{Q}$ alors $(\mathscr{A}, \mathscr{B} \setminus \{q\})$ est une coupure.

Plaçons-nous dans le premier cas et notons x cette coupure. Soit M un entier strictement positif. La coupure $x - M^{-1}$ est $< x$. Cela paraît évident mais en fait : $-M^{-1} < 0$ dans les rationnels ; donc aussi au sens des coupures ; donc par compatibilité avec l'addition des coupures, $x - M^{-1} < x$. Mais cela veut dire qu'il existe un nombre rationnel $a \in \mathscr{A}$ qui est $\geqslant x - M^{-1}$ (au sens des inégalités des coupures.) Ce a est dans un certain A_n, donc $x_n \geqslant a$ et par conséquent $x_n \geqslant x - M^{-1}$, puis $x_m \geqslant x - M^{-1}$ pour tous les $m \geqslant n$. Par ailleurs comme $A(x) = \mathscr{A}$ contient $A(x_m) = A_m$ on a $x_m \leqslant x$. On a obtenu l'inégalité prouvant que x était une limite de la suite (x_m).

← Ex. 36. Comprenne qui pourra…

Plaçons nous maintenant dans le deuxième cas, avec un certain q plus petit élément de $\mathscr{B}$. On peut dire, q n'étant pas dans $\mathscr{A}$, qu'il n'est dans aucun des A_n, donc $q \geqslant x_n$ pour tous les n (je rappelle que $A_n = \{a < x_n\}$).

On regarde maintenant $q - M^{-1}$ qui, n'étant plus dans $\mathscr{B}$ est forcément dans $\mathscr{A}$, donc dans l'un des A_n, donc $q - M^{-1} \leqslant x_n$ et a fortiori $q - M^{-1} \leqslant x_m$ pour tous les $m \geqslant n$. Mais alors $q - M^{-1} \leqslant x_m \leqslant q$ pour tout les m suffisamment grand, pour tout entier non nul M arbitrairement donné, et ici encore on a prouvé l'existence d'une limite.

Unicité de la limite en exercice ! □

Conservez cette fiche, elle pourra indirectement vous servir pour les mathématiques de la Licence. Par contre dans l'immédiat, c'est certain qu'elle fait des choses brutalement difficiles (comme cette dernière preuve), ou assez fastidieuses (comme de vérifier toutes les propriétés énoncées). De plus il y a un certain niveau d'abstraction, par exemple lorsqu'après avoir soigneusement distingué le nombre rationnel q de la coupure $c(q)$ qu'il définit, on se met tout d'un coup à parler de nombres réels et à ne plus rien distinguer du tout ![4] Il ne s'agit pas de l'assimiler immédiatement, vous avez le temps pour cela. Par contre il est essentiel de vous essayer à en comprendre au moins certains passages, ne serait-ce que pour pouvoir écrire des mathématiques à l'avenir et formaliser des démonstrations.

4. à tous les sens du terme, peut-être…