| Ateliers de Mathématiques | LICENCE S1 | MIMP–PC–SPI |
| --- | --- | --- |

**EXAMEN DU 10 JANVIER 2014**

**(durée : 2h ; calculatrices autorisées)**

# GROUPE 3

(Prof. : J.-F. BURNOL)

*Ce sujet est pour les étudiants du* GROUPE 3.
*Inscrivez le numéro de votre groupe de manière visible sur votre copie.*

**Exercice 1.** Déterminer une identité de Bezout reliant 157 et 30. (*La réponse doit expliciter les étapes intermédiaires dans les calculs, quelle que soit la méthode choisie*).

**Exercice 2.** *Les réponses doivent être justifiées.*

1. Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers (positifs ou négatifs) et $\mathrm{A} = a + b$, $\mathrm{B} = 3a + 4b$. Montrer $4\mathrm{A} - \mathrm{B} = a$ et exprimer $b$ en fonction de A et B.
2. On suppose connus deux nombres entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $ua + vb = 1$, en déduire une relation $\mathrm{UA} + \mathrm{VB} = 1$ pour U et V à préciser.
3. Si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ que peut-on dire de $\mathrm{pgcd}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ ?
4. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1 + x}{4 + 3x}$, avec $x > 0$. On suppose que $x = \frac{p}{q}$ est une fraction irréductible, exprimer $f(x)$ sous la forme d'une fraction *irréductible* $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$.
5. Trouver la solution positive à l'équation $f(x) = x$ (ceci nécessitera une racine carrée).
6. Le nombre $x$ déterminé à la question précédente sera noté $x_0$. Cet $x_0$ est-il un nombre rationnel ?

TOURNEZ LA PAGE POUR LE DERNIER EXERCICE

**Exercice 3.** *Les réponses doivent être justifiées. On rappelle que* « $n$ mod N » *se lit* « $n$ modulo N » *et représente une classe de congruence, dont un représentant est le reste dans la division euclidienne de $n$ par* N.

1. Trouver un couple $(u, v)$ d'entiers relatifs avec $11u + 5v = 1$. Que vaut pgcd$(11, 5)$ ?
2. Avec un couple quelconque $(u, v)$ vérifiant $11u + 5v = 1$ on forme l'entier positif ou négatif $r = -11u + 5v$. Que valent $r$ mod 11 et $r$ mod 5 ? (on demande un résultat indépendant de $u$ et de $v$).
3. En utilisant le couple $(u, v)$ de la première question trouver un $r$ avec $r \equiv 1 \pmod{11}$ et $r \equiv -1 \pmod{5}$ puis déterminer le plus petit entier positif $s$ avec $s \equiv 1 \pmod{11}$ et $s \equiv -1 \pmod{5}$.
4. On considère la suite $x_n = 8^n$ des puissances de 8. Établir les congruences modulo 11 :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+2} \equiv x_{n+1} + x_n \pmod{11}$$
5. Établir par ailleurs que la suite $y_n = 4^n$ des puissances de 4 vérifie les mêmes congruences :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+2} \equiv y_{n+1} + y_n \pmod{11}$$
6. On pose maintenant $z_n = 3(8^n - 4^n)$, que peut-on dire de $z_{n+2} - (z_{n+1} + z_n)$ modulo 11 ? Que valent $z_0$ et $z_1$ modulo 11 ?
7. On considère la suite de Fibonacci $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$, $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$, donc 0, 1, $\mathrm{F}_2 = 1$, $\mathrm{F}_3 = 2$, $\mathrm{F}_4 = 3$, $\mathrm{F}_5 = 5$, $\mathrm{F}_6 = 8, \ldots$ Déduire des résultats précédents :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F}_n \equiv 3(8^n - 4^n) \pmod{11}$$
8. Déduire du résultat précédent :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F}_{n+10} \equiv \mathrm{F}_n \pmod{11}$$
9. On admet que $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{F}_{n+10} \equiv -\mathrm{F}_n \pmod{5}$. En utilisant les questions précédentes déterminer $\mathrm{F}_{n+10}$ modulo 55 en fonction de $\mathrm{F}_n$ modulo 55.

FIN