Université Lille 1 – Licence, semestre 1 – Atelier Mathématiques

Fiche 1 : LONGUEURS DES PUISSANCES DE DEUX (en base 10)

Ces tables donnent, pour différentes valeurs de `n`, l'écriture décimale de l'entier `2^n` (en plus joli : 2^n) ainsi que sa longueur `L(2^n)` (c'est-à-dire le nombre de chiffres dans cette écriture en base 10), afin d'étudier comment se comportent les quotients `L(2^n)/n` lorsque `n` varie.

`2^n`	`L(2^n)`	`L(2^n)/n`
$2^{1} = 2$	1	1,000 0..
$2^{2} = 4$	1	0,500 0..
$2^{3} = 8$	1	0,333 3..
$2^{4} = 16$	2	0,500 0..
$2^{5} = 32$	2	0,400 0..
$2^{6} = 64$	2	0,333 3..
$2^{7} = 128$	3	0,428 5..
$2^{8} = 256$	3	0,375 0..
$2^{9} = 512$	3	0,333 3..
$2^{10} = 1\,024$	4	0,400 0..
$2^{11} = 2\,048$	4	0,363 6..
$2^{12} = 4\,096$	4	0,333 3..
$2^{13} = 8\,192$	4	0,307 6..
$2^{14} = 16\,384$	5	0,357 1..
$2^{15} = 32\,768$	5	0,333 3..
$2^{16} = 65\,536$	5	0,312 5..
$2^{17} = 131\,072$	6	0,352 9..
$2^{18} = 262\,144$	6	0,333 3..
$2^{19} = 524\,288$	6	0,315 7..
$2^{20} = 1\,048\,576$	7	0,350 0..

`2^n`	`L(2^n)`	`L(2^n)/n`
$2^{21} = 2\,097\,152$	7	0,333 3..
$2^{22} = 4\,194\,304$	7	0,318 1..
$2^{23} = 8\,388\,608$	7	0,304 3..
$2^{24} = 16\,777\,216$	8	0,333 3..
$2^{25} = 33\,554\,432$	8	0,320 0..
$2^{26} = 67\,108\,864$	8	0,307 6..
$2^{27} = 134\,217\,728$	9	0,333 3..
$2^{28} = 268\,435\,456$	9	0,321 4..
$2^{29} = 536\,870\,912$	9	0,310 3..
$2^{30} = 1\,073\,741\,824$	10	0,333 3..
$2^{31} = 2\,147\,483\,648$	10	0,322 5..
$2^{32} = 4\,294\,967\,296$	10	0,312 5..
$2^{33} = 8\,589\,934\,592$	10	0,303 0..
$2^{34} = 17\,179\,869\,184$	11	0,323 5..
$2^{35} = 34\,359\,738\,368$	11	0,314 2..
$2^{36} = 68\,719\,476\,736$	11	0,305 5..
$2^{37} = 137\,438\,953\,472$	12	0,324 3..
$2^{38} = 274\,877\,906\,944$	12	0,315 7..
$2^{39} = 549\,755\,813\,888$	12	0,307 6..
$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$	13	0,325 0..

`2^n`	`L(2^n)`	`L(2^n)/n`
$2^{10} = 1\,024$	4	0,400 0..
$2^{20} = 1\,048\,576$	7	0,350 0..
$2^{30} = 1\,073\,741\,824$	10	0,333 3..
$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$	13	0,325 0..
$2^{50} = 1\,125\,899\,906\,842\,624$	16	0,320 0..
$2^{60} = 1\,152\,921\,504\,606\,846\,976$	19	0,316 6..
$2^{70} = 1\,180\,591\,620\,717\,411\,303\,424$	22	0,314 2..
$2^{80} = 1\,208\,925\,819\,614\,629\,174\,706\,176$	25	0,312 5..
$2^{90} = 1\,237\,940\,039\,285\,380\,274\,899\,124\,224$	28	0,311 1..
$2^{100} = 1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376$	31	0,310 0..
$2^{110} = 1\,298\,074\,214\,633\,706\,907\,132\,624\,082\,305\,024$	34	0,309 0..
$2^{120} = 1\,329\,227\,995\,784\,915\,872\,903\,807\,060\,280\,344\,576$	37	0,308 3..
$2^{130} = 1\,361\,129\,467\,683\,753\,853\,853\,498\,429\,727\,072\,845\,824$	40	0,307 6..
$2^{140} = 1\,393\,796\,574\,908\,163\,946\,345\,982\,392\,040\,522\,594\,123\,776$	43	0,307 1..
$2^{150} = 1\,427\,247\,692\,705\,959\,881\,058\,285\,969\,449\,495\,136\,382\,746\,624$	46	0,306 6..

$2^{160} =$ 1 461 501 637 330 902 918 203 684 832 716 283 019 655 932 542 976	49	0,306 2..
$2^{170} =$ 1 496 577 676 626 844 588 240 573 268 701 473 812 127 674 924 007 424	52	0,305 8..
$2^{180} =$ 1 532 495 540 865 888 858 358 347 027 150 309 183 618 739 122 183 602 176	55	0,305 5..
$2^{190} =$ 1 569 275 433 846 670 190 958 947 355 801 916 604 025 588 861 116 008 628 224	58	0,305 2..
$2^{200} =$ 1 606 938 044 258 990 275 541 962 092 341 162 602 522 202 993 782 792 835 301 376	61	0,305 0..

2^n	L(2^n)	L(2^n)/n
$2^{1} =$ 2	1	1,000 0..
$2^{2} =$ 4	1	0,500 0..
$2^{4} =$ 16	2	0,500 0..
$2^{8} =$ 256	3	0,375 0..
$2^{16} =$ 65 536	5	0,312 5..
$2^{32} =$ 4 294 967 296	10	0,312 5..
$2^{64} =$ 18 446 744 073 709 551 616	20	0,312 5..
$2^{128} =$ 340 282 366 920 938 463 463 374 607 431 768 211 456	39	0,304 6..
$2^{256} =$ 115 792 089 237 316 195 423 570 985 008 687 907 853 269 984 665 640 564 039 457 584 007 913 129 639 936	78	0,304 6..
$2^{512} =$ 13 407 807 929 942 597 099 574 024 998 205 846 127 479 365 820 592 393 377 723 561 443 721 764 030 073 546 976 801 874 298 166 903 427 690 031 858 186 486 050 853 753 882 811 946 569 946 433 649 006 084 096	155	0,302 7..
$2^{1024} =$ 179 769 313 486 231 590 772 930 519 078 902 473 361 797 697 894 230 657 273 430 081 157 732 675 805 500 963 132 708 477 322 407 536 021 120 113 879 871 393 357 658 789 768 814 416 622 492 847 430 639 474 124 377 767 893 424 865 485 276 302 219 601 246 094 119 453 082 952 085 005 768 838 150 682 342 462 881 473 913 110 540 827 237 163 350 510 684 586 298 239 947 245 938 479 716 304 835 356 329 624 224 137 216	309	0,301 7..

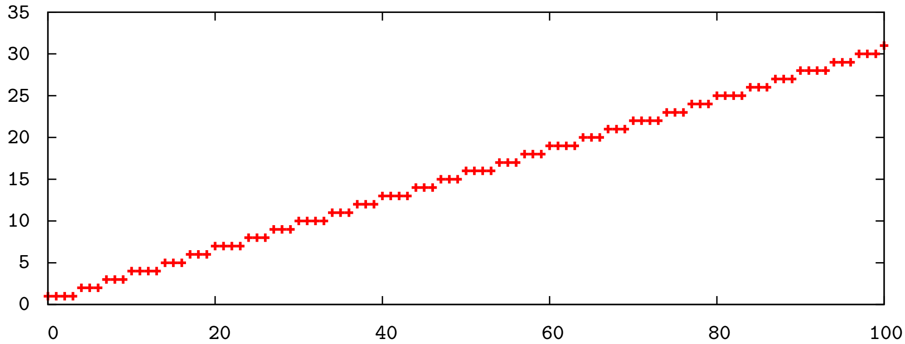
Université Lille 1 – Licence, semestre 1 – Atelier Mathématiques

Fiche 2 : LONGUEURS DES PUISSANCES DE DEUX (quelques graphiques)

La fiche précédente a donné des valeurs de 2^{n}, ainsi que les longueurs de leurs écritures décimales. Ici on représente ces longueurs $L(2^{n})$ de manière graphique en fonction de n.

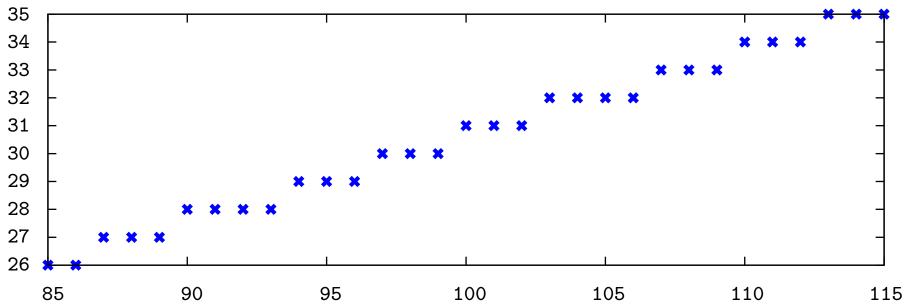
Dans le graphique ci-dessous les points sont représentés chacun par une petite croix.

FIGURE 1 – les points $(n, L(2^{n}))$ pour $0 \leqslant n \leqslant 100$



Si l'on regarde les « rangées » horizontales successives on constate qu'elles ont toutes soit quatre, soit troix croix, et qu'elles semblent se suivre de manière régulière suivant le schéma 4 - 3 - 3 - 4 - 3 - 3 - 4 - 3 - 3 - 4 - 3 - 3 - 4 - ... Mais il faut se méfier de généralisations trop hâtives :

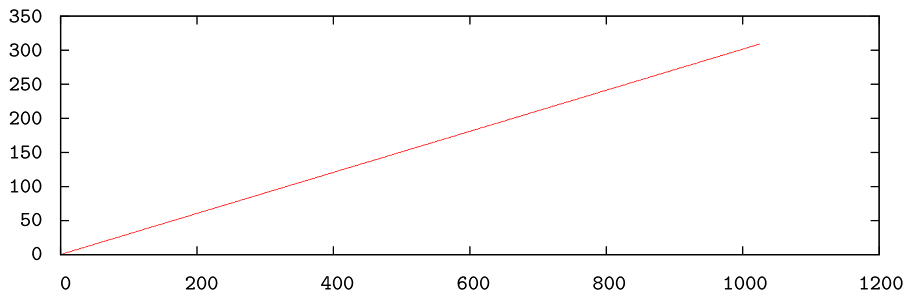
FIGURE 2 – les points $(n, L(2^{n}))$ pour $85 \leqslant n \leqslant 115$



La « règle » 4 - 3 - 3 a donc une première exception aux alentours de $n = 100$, il y a là trois « marches » successives avec trois points chacune.

Prenons maintenant un échantillon plus grand de valeurs de n, jusqu'à $n = 1024$. Le graphique (Figure 3, page suivante) semble presque être un segment de droite, mais comme on peut le voir en zoomant (sur la version électronique de ce document), ou avec une (très) bonne loupe (sur une impression papier de très bonne qualité), il est juste constitué des 1025 points $(n, L(2^{n}))$, $0 \leqslant n \leqslant 1024$ (chacun étant representé par un petit disque), et ces points sont par groupes de trois ou quatre sur des paliers horizontaux successifs.

Figure 3 – les points $(n, L(2^n))$ pour $0 \leqslant n \leqslant 1024$



Si tous ces points étaient sur une même droite passant par l'origine on aurait une formule $L(2^n) = \lambda n$. Une telle formule exacte n'existe pas, [1] par contre le graphique suggère fortement que la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L(2^n)}{n} = \lambda \tag{1}$$

existe. On aimerait le prouver et comprendre ce qu'est ce λ. Déjà au passage il faut comprendre ce qu'est une limite ; et aussi ce qu'est un nombre !

En fait le graphique suggère qu'il y a probablement un λ et une constante C (que l'on peut prendre peut-être égale à 1 ?) tels que l'on ait les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| L(2^n) - \lambda n \right| \leqslant C \ , \tag{2}$$

ce qui est bien plus précis que la seule affirmation de la limite (1). Attention il s'agit ici donc d'établir une vérité pour *tous* les entiers naturels ; aucune vérification par calculs numériques ne pourra suffire, [2] il faut une démonstration mathématique. Et peut-être l'énoncé est faux ...

1. à part le problème posé par $n = 0$, de toute façon il est clair que nos croix de la Figure 1 ne sont pas sur une même droite, que celle-ci passe ou non par l'origine des coordonnées.

2. on vient de voir avec les « 4-3-3 » que pour les nombres, il faut toujours se méfier de « lois » établies sur des échantillons même étendus. Et par ailleurs la connaissance d'une limite telle que (1) est toujours une information un peu fantomatique car elle dit ce qui se passe « à l'infini », au delà de n'importe quel échantillon numérique. Une inégalité comme (2) peut, elle, être falsifiée (mais uniquement pour des valeurs données, explicites, de λ et C) par un échantillon fini ; sa validité ne peut pas être établie par des vérifications numériques, aussi étendues soient-elles.

Université Lille 1 – Licence, semestre 1 – Atelier Mathématiques

Fiche 3 : LONGUEURS DES PUISSANCES DE DEUX (vers une théorie ?)

Le nombre $\mathtt{k}$ des chiffres de l'écriture en base $\mathtt{10}$ d'un entier $\mathtt{N}$ strictement positif est déterminé de manière unique par les inégalités :

$$10^{k-1} \leqslant N < 10^{k} \;. \tag{1}$$

Par exemple, pour $N = 99$, on a $10 \leqslant 99 < 100$ d'où $k = 2$, et 99 a en effet deux chiffres. Pour $N = 100$, il faut trois chiffres, et l'inégalité est $10^{3-1} = 100 \leqslant 100 < 10^3 = 1000$. Notons au passage qu'une puissance de dix a un chiffre de plus que la valeur de l'exposant : 10^k s'écrit avec 1 suivi de k zéros, donc en tout $k + 1$ chiffres.

Le nombre u_n de chiffres de 2^n en base 10 est donc l'unique entier vérifiant :

$$10^{u_n-1} \leqslant 2^n < 10^{u_n} \;. \tag{2}$$

On a vu dans les fiches précédentes que le quotient u_n/n donnait l'impression de « tendre » vers une certaine limite λ. Notons $v_n = u_n/n$, qui n'est donc plus un entier mais un nombre rationnel, un élément de $\mathbb{Q}$. L'inégalité précédente devient :

$$10^{nv_n-1} \leqslant 2^n < 10^{nv_n} \;. \tag{3}$$

Imaginons que l'on puisse « extraire la racine n^{e} ». Cela donnerait donc :

$$10^{v_n-\frac{1}{n}} \leqslant 2 < 10^{v_n} \;. \tag{4}$$

Supposons que n est très grand, donc que v_n est très proche du mythique λ, et comme $1/n$ est petit, on aurait $10^\lambda \pm \epsilon_n \leqslant 2 < 10^\lambda \pm \epsilon'_n$, avec ϵ_n et ϵ'_n deux petites quantités positives (le $\pm$ signifie qu'on laisse le signe non précisé, ne sachant pas ici si v_n est supérieur ou inférieur à λ). Ainsi

$$2 - 10^\lambda < \epsilon'_n \quad \text{et} \quad -\epsilon_n \leqslant 2 - 10^\lambda \quad \text{donc} \quad \left|2 - 10^\lambda\right| \leqslant \max(\epsilon_n, \epsilon'_n)$$

Comme on imagine que les quantités ϵ_n et ϵ'_n peuvent être rendues aussi petites que l'on veut en prenant n suffisamment grand, cela n'est possible que si

$$\boxed{2 = 10^\lambda} \tag{5}$$

Bon, donc imaginons que l'on ait une théorie permettant de définir une fonction $x \mapsto 10^x$, et que l'on ait trouvé en effet un λ avec $10^\lambda = 2$. En reportant dans (4) on aurait

$$10^{v_n-\frac{1}{n}} \leqslant 10^\lambda < 10^{v_n} \quad \text{puis, logiquement,} \quad v_n - \frac{1}{n} \leqslant \lambda < v_n \tag{6}$$

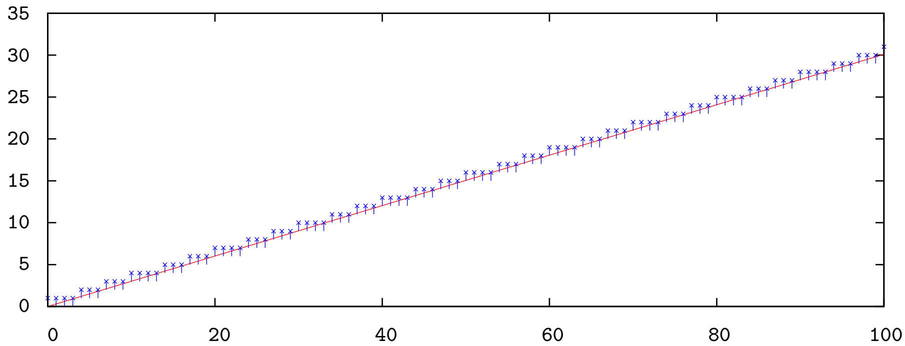
Donc finalement

$$\boxed{\lambda < v_n \leqslant \lambda + \frac{1}{n}} \quad \text{et, avec } u_n : \quad \boxed{0 < u_n - \lambda n \leqslant 1} \tag{7}$$

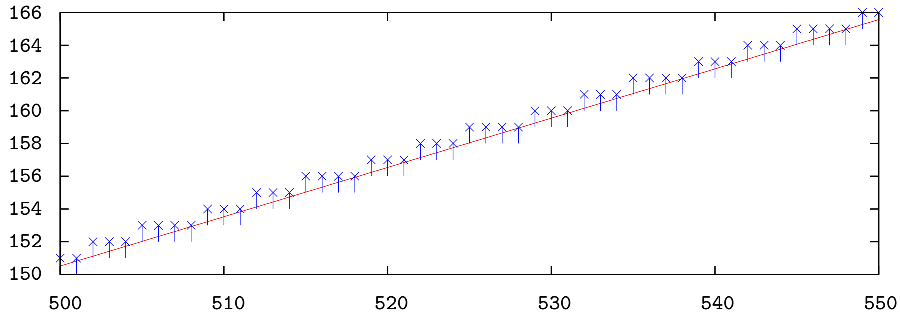
C'est exactement le genre de choses que l'on espérait sur la base de nos graphiques. Mais il y a un grand chemin à faire pour définir notre fonction 10^x, même si elle figure sur votre calculatrice, et qu'il y a même une touche (laquelle ?) qui permet pour chaque $y > 0$ de trouver le λ avec $10^\lambda = y$. En particulier si vous utilisez cette touche pour $y = 2$ vous obtenez (avec moins de chiffres, probablement) :

$$\lambda = 0{,}301\,029\,995\,663\,981\,195\,213\,738\,894\,724\ldots \tag{8}$$

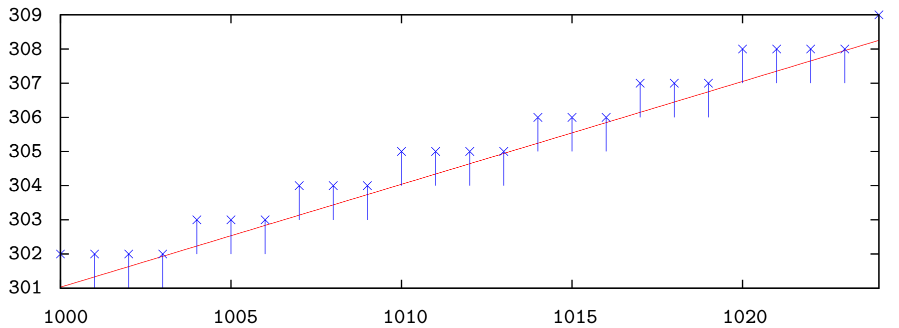
Voici un nouveau graphique, qui pour $0 \leqslant n \leqslant 100$ représente (par de petits segments verticaux) les points $(n, u_n - 1)$ et (n, u_n) ainsi que la droite d'équation $y = \lambda x$ (avec le lambda de (8) qui nous a été donné par la calculatrice ; ce n'est qu'une approximation du vrai λ qui nécessiterait une infinité de chiffres, mais de toute façon au niveau du graphique, utiliser ne serait-ce que dix décimales de λ suffit pour une précision meilleure que la taille d'un atome...).



La même chose de 500 à 550 pour voir :



Et pour finir de 1000 à 1024 :



Ainsi, la droite rouge s'arrange pour passer dans tous les petits segments bleus, ce qui est un exploit ! Le problème de comprendre les $u_n = L(2^n)$ est devenu celui de construire une fonction $x \mapsto 10^x$, et de résoudre l'équation $10^x = 2$.

Pour cela, les seuls nombres rationnels ne suffisent pas ... (à suivre)

Université Lille 1 – Licence, semestre 1 – Atelier Mathématiques

Fiche 4 : LONGUEURS DES PUISSANCES DE TROIS

L'analyse précédente nous a amené de l'écriture décimale des puissances de deux au problème de résoudre l'équation $10^x = 2$. Si l'on remplace 2 par un autre nombre, 3 par exemple, c'est exactement pareil : l'étude des longueurs en base 10 des 3^n amène immanquablement à l'équation $10^x = 3$.

Prenons ainsi par exemple $n = 140$. Il lui correspond $3^{140} = 6\,265\,787\,482\,177\,970\,379\,256\,224\,194\,341\,930\,332\,206\,694\,446\,810\,665\,274\,859\,598\,050\,801$, qui a 67 chiffres. Même si votre calculatrice ne vous donne pas tous les chiffres de 3^{140} elle peut au moins vous en donner une approximation du genre $3^{140} \approx 6{,}265\,787\,5 \cdot 10^{66}$, et cette approximation suffit pour affirmer que 3^{140} a exactement 67 chiffres.

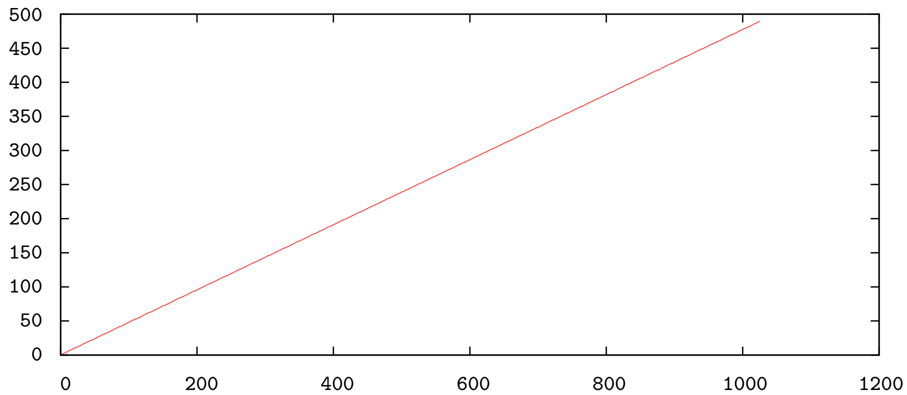
Quelqu'un de très patient peut donc, muni de sa calculatrice pour simplifier le travail, construire au moins partiellement des tables et des graphiques comme les suivants :

3^n	$L(3^n)$	$L(3^n)/n$	3^n	$L(3^n)$	$L(3^n)/n$
$3^1 = 3$	1	1,000 0..	$3^{21} = 10\,460\,353\,203$	11	0,523 8..
$3^2 = 9$	1	0,500 0..	$3^{22} = 31\,381\,059\,609$	11	0,500 0..
$3^3 = 27$	2	0,666 6..	$3^{23} = 94\,143\,178\,827$	11	0,478 2..
$3^4 = 81$	2	0,500 0..	$3^{24} = 282\,429\,536\,481$	12	0,500 0..
$3^5 = 243$	3	0,600 0..	$3^{25} = 847\,288\,609\,443$	12	0,480 0..
$3^6 = 729$	3	0,500 0..	$3^{26} = 2\,541\,865\,828\,329$	13	0,500 0..
$3^7 = 2\,187$	4	0,571 4..	$3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$	13	0,481 4..
$3^8 = 6\,561$	4	0,500 0..	$3^{28} = 22\,876\,792\,454\,961$	14	0,500 0..
$3^9 = 19\,683$	5	0,555 5..	$3^{29} = 68\,630\,377\,364\,883$	14	0,482 7..
$3^{10} = 59\,049$	5	0,500 0..	$3^{30} = 205\,891\,132\,094\,649$	15	0,500 0..
$3^{11} = 177\,147$	6	0,545 4..	$3^{31} = 617\,673\,396\,283\,947$	15	0,483 8..
$3^{12} = 531\,441$	6	0,500 0..	$3^{32} = 1\,853\,020\,188\,851\,841$	16	0,500 0..
$3^{13} = 1\,594\,323$	7	0,538 4..	$3^{33} = 5\,559\,060\,566\,555\,523$	16	0,484 8..
$3^{14} = 4\,782\,969$	7	0,500 0..	$3^{34} = 16\,677\,181\,699\,666\,569$	17	0,500 0..
$3^{15} = 14\,348\,907$	8	0,533 3..	$3^{35} = 50\,031\,545\,098\,999\,707$	17	0,485 7..
$3^{16} = 43\,046\,721$	8	0,500 0..	$3^{36} = 150\,094\,635\,296\,999\,121$	18	0,500 0..
$3^{17} = 129\,140\,163$	9	0,529 4..	$3^{37} = 450\,283\,905\,890\,997\,363$	18	0,486 4..
$3^{18} = 387\,420\,489$	9	0,500 0..	$3^{38} = 1\,350\,851\,717\,672\,992\,089$	19	0,500 0..
$3^{19} = 1\,162\,261\,467$	10	0,526 3..	$3^{39} = 4\,052\,555\,153\,018\,976\,267$	19	0,487 1..
$3^{20} = 3\,486\,784\,401$	10	0,500 0..	$3^{40} = 12\,157\,665\,459\,056\,928\,801$	20	0,500 0..

3^n	$L(3^n)$	$L(3^n)/n$
$3^1 = 3$	1	1,000 0..
$3^2 = 9$	1	0,500 0..
$3^4 = 81$	2	0,500 0..
$3^8 = 6\,561$	4	0,500 0..
$3^{16} = 43\,046\,721$	8	0,500 0..
$3^{32} = 1\,853\,020\,188\,851\,841$	16	0,500 0..
$3^{64} = 3\,433\,683\,820\,292\,512\,484\,657\,849\,089\,281$	31	0,484 3..
$3^{128} = 11\,790\,184\,577\,738\,583\,171\,520\,872\,861\,412\,518\,665\,678\,211\,592\,275\,841\,109\,096\,961$	62	0,484 3..
$3^{256} = 139\,008\,452\,377\,144\,732\,764\,939\,786\,789\,661\,303\,114\,218\,850\,808\,529\,137\,991\,604\,824\,430\,036\,072\,629\,766\,435\,941\,001\,769\,154\,109\,609\,521\,811\,665\,540\,548\,899\,435\,521$	123	0,480 4..

	3^n	$L(3^n)$	$L(3^n)/n$
3^{512} =	19 323 349 832 288 915 105 454 068 722 019 581 055 401 465 761 603 328 550 184 537 628 902 466 746 415 537 000 017 939 429 786 029 354 390 082 329 294 586 119 505 153 509 101 332 940 884 098 040 478 728 639 542 560 550 133 727 399 482 778 062 322 407 372 338 121 043 399 668 242 276 591 791 504 658 985 882 995 272 436 541 441	245	0,478 5..
3^{1024} =	373 391 848 741 020 043 532 959 754 184 866 588 225 409 776 783 734 007 750 636 931 722 079 040 617 265 251 229 993 688 938 803 977 220 468 765 065 431 475 158 108 727 054 592 160 858 581 351 336 982 809 187 314 191 748 594 262 580 938 807 019 951 956 404 285 571 818 041 046 681 288 797 402 925 517 668 012 340 617 298 396 574 731 619 152 386 723 046 235 125 934 896 058 590 588 284 654 793 540 505 936 202 376 547 807 442 730 582 144 527 058 988 756 251 452 817 793 413 352 141 920 744 623 027 518 729 185 432 862 375 737 063 985 485 319 476 416 926 263 819 972 887 006 907 013 899 256 524 297 198 527 698 749 274 196 276 811 060 702 333 710 356 481	489	0,477 5..

Figure 1 – les points $(n, L(3^n))$ pour $0 \leqslant n \leqslant 1024$ sont presque sur une droite



Si l'on utilise la touche de la calculatrice qui résout l'équation $10^x = 3$ on trouve la solution

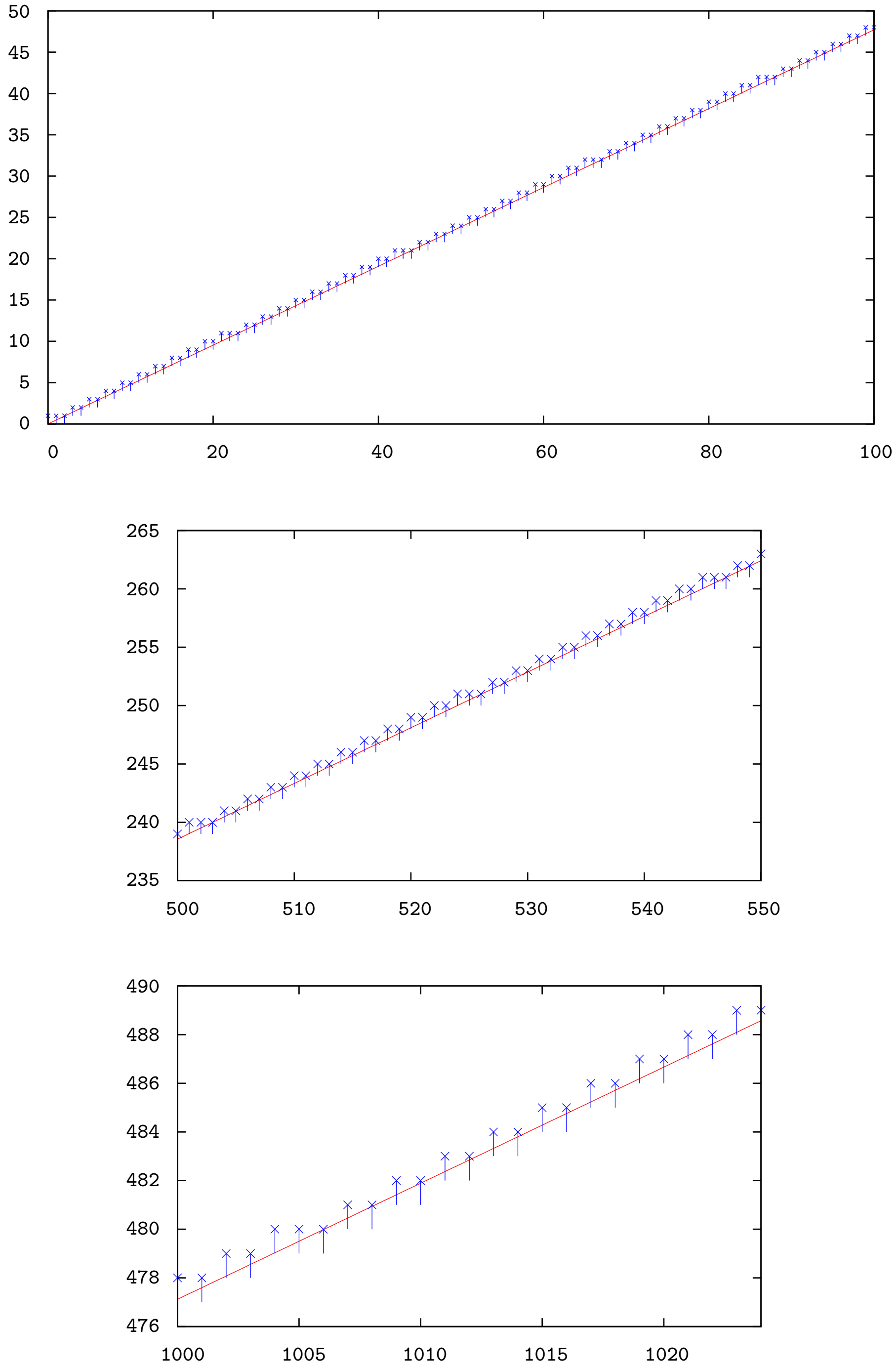
$$\mu = 0{,}477\,121\,254\,719\,662\,437\,295\,027\,903\,255\ldots \tag{1}$$

qui semble compatible avec nos tables et graphiques. En particulier la Figure 2 page suivante est compatible avec les inégalités

$$L(3^n) - 1 \leqslant \mu \cdot n < L(3^n) \quad (\Leftarrow 10^{L(3^n)-1} \leqslant 3^n < 10^{L(3^n)} \quad \text{et} \quad 3 = 10^{\mu})\ , \tag{2}$$

qui s'interprètent en disant que la droite rouge passe dans les segments bleus.

Figure 2 – les points $(\mathtt{n}, \mathtt{L}(3^{\mathtt{n}}))$ et la droite de pente 0,477 121 . . .



Université Lille 1 – Licence, semestre 1 – Atelier Mathématiques

Fiche 5 : LONGUEURS DES PUISSANCES DE DEUX, TROIS, ...
(les nombres rationnels ne suffisent pas)

On a compris maintenant que derrière le fait que les longueurs $\mathtt{L(2^n)}$, ou $\mathtt{L(3^n)}$, ou d'ailleurs plus généralement $\mathtt{L(a^n)}$ pour un autre entier $\mathtt{a}$ quelconque, se comportent presque de manière linéaire en fonction de $\mathtt{n}$ se cache la résolution de l'équation $\mathtt{10^x = 2}$, ou $\mathtt{10^x = 3}$, etc ...

Bien sûr aucun nombre entier naturel $\mathtt{x} \in \mathbb{N}$ ou même entier relatif $\mathtt{x} \in \mathbb{Z}$ ne vérifie $\mathtt{10^x = 2}$. La plus grande puissance de $\mathtt{10}$ inférieure à $\mathtt{2}$ est $\mathtt{10^0 = 1}$ et la plus petite supérieure à $\mathtt{2}$ est $\mathtt{10^1 = 10}$.

Il est plus subtil qu'aucun nombre rationnel $\mathtt{x} \in \mathbb{Q}$, $\mathtt{x} = \frac{\mathtt{a}}{\mathtt{b}}$, ne fonctionne non plus :

Quelle que soit la façon de définir $\mathtt{y = 10^{a/b}}$, elle doit assurer $\mathtt{y^b = 10^a}$. Ici $\mathtt{b}$ est un entier au moins égal à $\mathtt{1}$ et l'affirmation est que ni $\mathtt{2^b}$, ni $\mathtt{3^b}$ ne peuvent s'écrire sous la forme $\mathtt{10^a}$ avec $\mathtt{a} \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

Tout d'abord si $\mathtt{a} \leqslant \mathtt{0}$ alors $\mathtt{0 < 10^a} \leqslant \mathtt{1}$ et donc $\mathtt{a}$ doit être $\mathtt{> 0}$ pour que $\mathtt{10^a}$ ait une chance d'être un $\mathtt{2^b}$ ou un $\mathtt{3^b}$. La puissance $\mathtt{10^a}$ est alors évidemment divisible par $\mathtt{10}$. Mais une puissance de $\mathtt{2}$ ne peut pas être divisible par $\mathtt{10}$. Pourquoi ? car on sait que la divisibilité par $\mathtt{10}$ se lit sur l'écriture décimale : se termine-t-elle par un zéro ?

Et on sait que lorsque l'on multiplie un nombre $\mathtt{N}$ par $\mathtt{2}$ alors il suffit de regarder l'action de $\mathtt{2}$ sur le dernier chiffre de $\mathtt{N}$ pour obtenir le dernier chiffre de $\mathtt{2N}$. Partant de $\mathtt{1 = 2^0}$ voici comment se comportent les derniers chiffres :

$$\mathtt{1} \to \mathtt{2} \to \mathtt{4} \to \mathtt{8} \to \mathtt{6} \to \mathtt{2} \to \mathtt{4} \to \mathtt{8} \to \mathtt{6} \to \mathtt{2} \to \cdots$$

De même le dernier chiffre en base $\mathtt{10}$ des puissances de trois successives est :

$$\mathtt{1} \to \mathtt{3} \to \mathtt{9} \to \mathtt{7} \to \mathtt{1} \to \mathtt{3} \to \mathtt{9} \to \mathtt{7} \to \mathtt{1} \to \cdots$$

Dans les deux cas ça se répète et jamais aucun $\mathtt{0}$ n'apparaîtra dans la liste, donc $\mathtt{2^b}$ ou $\mathtt{3^b}$ ne peuvent jamais être divisibles par $\mathtt{10}$.

Bon, donc l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ne suffit pas pour résoudre une équation comme $\mathtt{10^x = 2}$.

Et l'autre chose, c'est que déjà pour construire la fonction $\mathtt{x} \mapsto \mathtt{10^x}$ pour les seuls $\mathtt{x}$ rationnels, ça bloque tout de suite. Par exemple pour $\mathtt{x} = \frac{1}{2}$, l'hypothétique $\mathtt{y = 10^{1/2}}$ doit vérifier $\mathtt{y^2 = 10}$. Mais ceci est impossible avec un $\mathtt{y} \in \mathbb{Q}$:

En effet, un tel $\mathtt{y}$ sera non nul, on peut le supposer positif, donc de la forme $\mathtt{y} = \frac{\mathtt{a}}{\mathtt{b}}$, $\mathtt{a, b} \geqslant \mathtt{1}$.

Comme $\mathtt{a^2 = 10b^2}$, le carré de $\mathtt{a}$ est divisible par $\mathtt{10}$. Mais si le dernier chiffre de $\mathtt{a}$ en base $\mathtt{10}$ est $\mathtt{0}$, $\mathtt{1}$, $\mathtt{2}$, $\mathtt{3}$, $\mathtt{4}$, $\mathtt{5}$, $\mathtt{6}$, $\mathtt{7}$, $\mathtt{8}$, ou $\mathtt{9}$ alors son carré a pour dernier chiffre $\mathtt{0}$, $\mathtt{1}$, $\mathtt{4}$, $\mathtt{9}$, $\mathtt{6}$, $\mathtt{5}$, $\mathtt{6}$, $\mathtt{9}$, $\mathtt{4}$, ou $\mathtt{1}$, donc si ce carré est divisible par $\mathtt{10}$ alors $\mathtt{a}$ l'est aussi.

Ainsi $\mathtt{a = 10a'}$, $\mathtt{100a'^2 = 10b^2}$ donc $\mathtt{b^2 = 10a'^2}$. Donc $\mathtt{b^2}$ est divisible par $\mathtt{10}$ ainsi $\mathtt{b}$ est divisible par $\mathtt{10}$, $\mathtt{b = 10b'}$, $\mathtt{100b'^2 = 10a'^2}$ donc $\mathtt{a'^2 = 10b'^2}$. On est parti d'un couple $\mathtt{(a, b)}$ d'entiers strictement positifs avec $\mathtt{a^2 = 10b^2}$ et on a trouvé un nouveau $\mathtt{(a' = a/10, b' = b/10)}$. On peut recommencer autant de fois que l'on veut et montrer par récurrence que $\mathtt{(a/10^k, b/10^k)}$ est toujours un couple solution d'entiers strictement positifs, quel que soit l'entier naturel $\mathtt{k}$. Mais pour $\mathtt{k}$ suffisamment grand $\mathtt{10^k > a}$ ne peut plus être un diviseur de $\mathtt{a}$. Contradiction. L'hypothèse de l'existence de $\mathtt{(a, b)}$ se révèle donc mener à une contradiction.

Conclusion : on a besoin de plus que les seuls nombres « rationnels » pour étudier des questions ne parlant initialement que de nombres entiers, comme notre question sur le comportement des longueurs $\mathtt{L(a^n)}$ des écritures en base $\mathtt{10}$ des puissances successives d'un même nombre $\mathtt{a}$. On a besoin des « nombres réels ». (à suivre ...)