

# SUJETS POUR LES ORAUX DE L'AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES

D'après le site <http://agrint.agreg.org> et le rapport du jury pour la session 2016. Dernière consultation le 6 juin 2017. L'auteur décline toute responsabilité en cas d'erreur de transcription, ne vous fiez qu'aux originaux.

## LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

101 : Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

102 : Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.

103 : Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

104 : Nombres premiers.

106 : PGCD dans  $K[X]$ , où  $K$  est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.

107 : Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.

109 : Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.

110 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

112 : Changements de bases en algèbre linéaire, en algèbre bilinéaire. Applications. (*Extension de l'intitulé en 2017 !*)

113 : Déterminants. Applications.

114 : Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.

117 : Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.

119 : Utilisation des nombres complexes en géométrie.

120 : Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications.

121 : Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques.

123 : Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.

125 : Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.

128 : Barycentres. Applications.

131 : Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.

137 : Droites et cercles dans le plan affine euclidien.

142 : Utilisation de groupes en géométrie.

- 143 : Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
- 144 : Notion de rang en algèbre linéaire. Applications.
- 146 : Coniques.
- 150 : Diverses factorisations de matrices. Applications.
- 151 : Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 155 : Systèmes linéaires. Applications.
- 156 : Valeurs propres. Recherche et utilisation.
- ~~157 : Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ . (supprimé en 2016)~~
- 158 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 159 : Algorithme d'Euclide. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
- 163 : Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
- 165 : Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
- 166 : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications. *depuis la session 2016 !*
- 167 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications. *depuis la session 2016 !*
- 168 : Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines. *depuis la session 2016 !*

## LEÇONS D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

201 : Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.

202 : Séries à termes réels positifs. Applications.

203 : Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).

204 : Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.

205 : Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.

206 : Parties compactes de  $\mathbb{R}^n$ . Fonctions continues sur de telles parties. Exemples et applications.

207 : Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.

208 : Problèmes de point fixe.

209 : Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

210 : Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.

213 : Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre  $\pi$ .

215 : Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.

216 : Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.

217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

218 : Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

219 : Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.

220 : Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.

221 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.

223 : Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.

224 : Équations différentielles linéaires d'ordre deux :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ , où  $a, b, c$  sont des fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.

225 : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.

227 : Fonctions de plusieurs variables: dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe  $C^1$ . Exemples.

228 : Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles. Applications.

229 : Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.

230 : Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Variance, covariance. Exemples.

231 : Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.

232 : Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.

235 : Exponentielles de matrices. Applications.

237 : Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.

241 : Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples.

244 : Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité . . .

249 : Loi normale en probabilités et statistique.

251 : Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique.

254 : Algorithmes d'approximation du nombre  $\pi$ .

256 : Vitesse et accélération de convergence. Définition et exemples.

257 : Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.

258 : Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.

~~259 : Utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistique. (supprimée en 2017, voir la 453).~~

260 : Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'utilisation.

262 : Étude métrique des courbes planes.

263 : Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

264 : Fonctions développables en série entière.

265 : Inversion locale, difféomorphismes. Applications.

266 : Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.

267 : La fonction Gamma.

## EXERCICES D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

301 : Exercices sur les groupes.

302 : Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ .

304 : Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 : Exercices faisant intervenir les nombres premiers.

306 : Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en oeuvre des algorithmes associés.

307 : Exercices faisant intervenir des dénombrements.

309 : Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

310 : Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.

311 : Illustrer différents usages de la notion de rang.

312 : Illustrer différents usages des matrices inversibles.

313 : Exercices illustrant l'utilisation de systèmes linéaires.

314 : Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.

315 : Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.

317 : Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.

319 : Exercices faisant intervenir des algorithmes de décomposition de matrices.

321 : Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.

322 : Exercices sur les formes quadratiques.

323 : Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

325 : Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.

326 : Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.

328 : Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.

330 : Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.

334 : Exercices sur les coniques.

339 : Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

340 : Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.

342 : Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.

345 : Exercices sur les triangles.

346 : Exemples de problèmes modélisés par des graphes.

348 : Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.

349 : Exemples de méthodes de chiffrement ou de codage.

350 : Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice.

351 : Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.

353 : Exercices faisant intervenir la notion d'endomorphisme nilpotent.

354 : Exercices sur les cercles et les sphères.

355 : Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.

356 : Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.

357 : Exercices utilisant le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

## EXERCICES D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

401 : Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.

402 : Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 : Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 : Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

406 : Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence.

407 : Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 : Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 : Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.

410 : Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

411 : Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 : Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.

413 : Exemples d'applications des séries entières.

414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 : Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

417 : Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.

418 : Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.

421 : Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Illustration algorithmique.

422 : Exemples d'étude d'intégrales impropres.

423 : Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

~~425 : Exemples de calculs de longueurs, d'aires et de volumes. (Fusionne avec la 426 en 2017 !)~~

426 : Exemples et applications de calculs d'intégrales multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes, .... (Intègre l'ancienne 425 en 2017 !)

427 : Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

428 : Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.

- 429 : Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 430 : Exemples d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales, économiques,...)
- 431 : Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
- 432 : Exemples d'approximations d'un nombre réel. Illustration algorithmique.
- 434 : Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
- 435 : Exemples de modélisation en probabilités.
- 436 : Exemples d'applications de l'intégration par parties.
- 437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- 438 : Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités. (*Extension de l'intitulé en 2017 !*)
- 439 : Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.
- 440 : Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
- 441 : Exemples de systèmes différentiels linéaires en dimension 2 ou 3. Allure des trajectoires.
- 443 : Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations  $F(X) = 0$ ,  $X$  désignant une variable réelle ou vectorielle.
- 444 : Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Illustration algorithmique.
- 447 : Exemples d'équations fonctionnelles.
- 448 : Exemples d'utilisation d'intervalles de fluctuation et d'intervalles de confiance.
- 449 : Exemples d'équations différentielles non linéaires.
- 451 : Exemples d'applications des transformées de Fourier et Laplace.
- 452 : Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
- 453 : Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et statistique. (*Nouveau en 2017 ! voir ancienne 259*)