Aspects de base de l'intégration des fonctions telle que définie par Bernhard Riemann

C'est dans le cadre de son Mémoire sur les séries trigonométriques *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, 1854, parution posthume en 1867, que Bernhard Riemann présenta son approche à l'intégration. Ce texte a été écrit à une époque où la notion même de nombres réels n'avait pas été bien clarifiée.

Bornes supérieures, critère de Cauchy, ensembles fermés, recouvrements dénombrables, ensembles de mesure nulle, continuités simple et uniforme, sont comme prêts à surgir de derrière le texte de Riemann.

Voici les paroles de J.-P. Kahane à ce sujet : *Comme nous le voyons, des notions aussi importantes que les réunions dénombrables, les ensembles fermés, la compacité des ensembles fermés bornés et les ensembles de mesure de Lebesgue nulle étaient appelées par le problème et par la condition donnée par Riemann.*

Séries de Fourier et ondelettes,
J.-P. Kahane et P. G. Lemarié. éd. Cassini, 1998.

Vous retrouverez dans ce dernier livre une large partie du Mémoire de Riemann, plus étendue que les quelques extraits qui sont proposés ici en annexe.

À la typographie près j'ai repris ici à l'identique une partie du polycopié suivant :
`http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeRiemann.pdf`
dont l'origine remonte au cours de Mathématiques de première année d'université à Lille en 2003/2004, deuxième semestre (on sortait du premier semestre en ayant assimilé les bornes supérieures, les suites de Cauchy, etc...) et que j'avais un peu étendu à l'occasion d'un cours de troisième année en 2006. J'en ai soustrait ces aspects plus avancés et n'ai mis en annexe que la traduction française du texte de Riemann, l'original en allemand étant dans le polycopié ci-dessus.

Le point de vue des sommes de Riemann (et des sommes de Darboux) est privilégié par rapport à celui des fonctions en escaliers, ce texte est complémentaire à mes leçons, et les notations en sont sans doute parfois différentes. Le style est celui d'un unique exposé oral, avec des rallonges, et sur la fin certains énoncés sont laissés « en exercices ».

1 Définitions et premières propriétés principales

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle borné $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Nous imposerons à la fonction f d'être bornée.[1]

On commence par quelques définitions : une subdivision $\mathcal{A}$ est la donnée d'un nombre fini de points $a_0 = a$, a_1, a_2, ..., $a_N = b$ avec $a_j \leqslant a_{j+1}$ pour $0 \leqslant j < N$. On peut combiner deux subdivisions, ce qui en donne une troisième plus « fine ». Le j-ième intervalle de la subdivision est $I_j = [a_{j-1}, a_j]$. Définissons les nombres réels m_j et M_j par[2]

$$m_j = \inf_{x \in I_j} f(x) \qquad M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$$

La somme de Darboux inférieure $S_-(f, \mathcal{A})$ associée à $\mathcal{A}$ est la quantité :

$$S_-(f, \mathcal{A}) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (a_j - a_{j-1}) m_j$$

La somme de Darboux supérieure $S_+(f, \mathcal{A})$ est :

$$S_+(f, \mathcal{A}) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (a_j - a_{j-1}) M_j$$

On se fait en passant la petite remarque que si $a_{j-1} = a_j$ alors il n'y pas de contribution de l'intervalle I_j aux sommes de Darboux. Plus essentiel est l'observation que toujours : $S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant S_+(f, \mathcal{A})$. On montrera bien mieux plus loin avec le Lemme crucial :

$$\forall \mathcal{A}, \forall \mathcal{B} \quad S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant S_+(f, \mathcal{B})$$

Admettons-le pour l'instant. On définit une intégrale inférieure $I_-(f)$ et une intégrale supérieure $I_+(f)$ via :

$$\sup_{\text{tous les } \mathcal{A}} S_-(f, \mathcal{A}) = I_-(f) \leqslant I_+(f) = \inf_{\text{tous les } \mathcal{B}} S_+(f, \mathcal{B})$$

On dira que la fonction f est *intégrable au sens de Riemann* (ou plus simplement $\mathcal{R}$-intégrable) sur l'intervalle $[a, b]$ si $I_-(f) = I_+(f)$. On appelle intégrale de Riemann de f la valeur commune, que l'on note temporairement ici I(f). Ensuite on adoptera la notation plus usuelle $\int_a^b f(x)dx$ (nota bene : la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du = \dots$).

Nous donnerons plus loin les preuves des affirmations suivantes :

---

1. la théorie de Riemann procède en deux temps : d'abord on ne considère que les fonctions bornées sur les intervalles bornés ; ensuite on a une deuxième définition (intégrales « généralisées »), par une limite, si l'intervalle est infini, ou si la fonction n'est pas bornée en a^+ ou en b^-.

2. On aurait pu prendre à leur place des infima ou suprema sur des intervalles ouverts, cela ne change rien au final, rendrait plus facile certaines considérations, un peu moins d'autres. On aurait aussi pu imposer aux points a_j la condition $a_j < a_{j+1}$

- Toute fonction monotone est intégrable au sens de Riemann.
- Toute fonction continue est intégrable au sens de Riemann.
- Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.
- Si la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ alors elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ $(a < b < c)$. De plus on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Le *pas* noté $\delta(\mathcal{A})$ d'une subdivision $\mathcal{A}$ est la valeur maximale des $a_j - a_{j-1}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. En outre on désigne par

$$\Delta(\mathcal{A}) = S_+(f, \mathcal{A}) - S_-(f, \mathcal{A})$$

l'écart entre la somme inférieure et la somme supérieure. Clairement, si $\Delta(\mathcal{A}) < \epsilon$ pour un $\mathcal{A}$ alors $I_+(f) - I_-(f) < \epsilon$.

Théorème : *Si* f *est $\mathcal{R}$-intégrable alors quel que soit* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$\delta(\mathcal{A}) \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad I(f) - \epsilon \leqslant S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant I(f) \leqslant S_+(f, \mathcal{A}) \leqslant I(f) + \epsilon$$

La démonstration n'est pas immédiate : nous la verrons plus loin.

À toute subdivision $\mathcal{A}$ et tout choix subordonné $\underline{\xi} = (\xi_j)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ de points ξ_j, c'est-à-dire $\xi_j \in I_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on associe la somme de Riemann :

$$S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi}) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (a_j - a_{j-1}) f(\xi_j)$$

On a toujours :

$$S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi}) \leqslant S_+(f, \mathcal{A})$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ ayant la propriété du Théorème précédent pour ce ϵ. Si $\delta(\mathcal{A}) \leqslant \delta$ alors $S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi})$, qui est entre $S_-(f, \mathcal{A})$ et $S_+(f, \mathcal{A})$, appartient à l'intervalle $[I(f) - \epsilon, I(f) + \epsilon]$. Donc :

$$\delta(\mathcal{A}) \leqslant \delta \Rightarrow \left|S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi}) - I(f)\right| \leqslant \epsilon$$

On a ainsi le théoréme suivant :

Théorème : *Soit* f *intégrable au sens de Riemann. Pour toute suite de subdivisions* $\mathcal{A}^{(n)}$*, de pas* $\delta(\mathcal{A}^{(n)})$ *tendant vers zéro, et tout choix arbitraire de points subordonnés* $\underline{\xi}^{(n)}$*, les sommes de Riemann associées convergent vers l'intégrale de Riemann de* f *:*

$$\lim_{n \to \infty} \delta(\mathcal{A}^{(n)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} S(f, \mathcal{A}^{(n)}, \underline{\xi}^{(n)}) = I(f)$$

D'ailleurs, Riemann définit précisément la $\mathcal{R}$-intégrabilité comme étant cette propriété d'existence d'une limite pour les sommes de Riemann lorsque le pas tend vers zéro. L'énoncé permet de comprendre la notation $\int_a^b f(x)dx$: le symbole $\int$ est une lettre S stylisée, comme dans « Somme », le dx représente les accroissements $a_j - a_{j-1}$, et $\int_a^b f(x)dx$ est donc là pour rappeler la somme de Riemann $\sum_j f(\xi_j)(a_j - a_{j-1})$, $\xi_j \in [a_{j-1}, a_j]$ (certes la notation existait avant la notion de somme de Riemann !).

En particulier on a, si f est $\mathcal{R}$-intégrable :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N}\Big(f(a) + f(a + \frac{b-a}{N}) + f\Big(a + 2\frac{b-a}{N}\Big) + \cdots + f\Big(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\Big)\Big)$$

car on a utilisé ici les subdivisions « équidistantes » dont le pas $\frac{b-a}{N}$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini, en prenant comme point d'évaluation dans I_j le point a_{j-1} qui est son extrémité gauche.

2 Exemple et contre-exemple

Si on prend sur $[0,1]$ la fonction considérée pour la première fois par Dirichlet qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon, alors les sommes de Riemann ci-dessus valent toutes 1. Mais si entre $a_{j-1} = \frac{j-1}{N}$ et $a_j = \frac{j}{N}$ on choisit ξ_j irrationnel, ce qui est toujours possible (par exemple $\xi_j = \frac{j-1}{N} + \frac{\sqrt{2}-1}{N}$), on obtient d'autres sommes, valant toutes zéro. Cette fonction bizarre n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

Par contre si on modifie un peu l'exemple de Dirichlet on posant $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ pour toute fraction irréductible $\frac{p}{q}$, $q \geqslant 1$, alors il n'est pas trop difficile de voir que f est bien intégrable au sens de Riemann, et d'ailleurs avec $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, bien que $f \geqslant 0$ et qu'il existe des x partout denses avec $f(x) > 0$. Vous pourrez prouver que f est continue en tout $x \notin \mathbb{Q}$ et discontinue en tout $x \in \mathbb{Q}$. En fait $\lim_{y\to x} f(y) = 0$ pour tout x.

3 Démonstrations

Regardons ce qui se passe lorsque l'on ajoute un point α à une subdivision $\mathcal{A}$ pour obtenir la subdivision $\mathcal{A}'$. Si α coïncide avec l'un des a_j on n'a rien changé. Sinon on a $a_{j-1} < \alpha < a_j$ pour l'un des j. La somme de Darboux inférieure associée à $\mathcal{A}'$ diffère de celle associée à $\mathcal{A}$ par le fait que $(\alpha - a_{j-1}) \inf_{a_{j-1}\leqslant x\leqslant\alpha} f(x) + (a_j - \alpha) \inf_{\alpha\leqslant x\leqslant a_j} f(x)$ remplace $(a_j - a_{j-1})m_j$. Or certainement $\inf_{a_{j-1}\leqslant x\leqslant\alpha} f(x) \geqslant m_j$ puisque $m_j = \inf_{a_{j-1}\leqslant x\leqslant a_j} f(x)$. De même $\inf_{\alpha\leqslant x\leqslant a_j} f(x) \geqslant m_j$. Donc $S_-(f, \mathcal{A}') \geqslant S_-(f, \mathcal{A})$. Si on itère on obtient que si C est obtenue à partir de $\mathcal{A}$ en ajoutant un nombre fini de points alors nécessairement $S_-(f, \mathcal{C}) \geqslant S_-(f, \mathcal{A})$. Par contre on se convainc que c'est le contraire qui se passe pour les sommes supérieures : $S_+(f, \mathcal{C}) \leqslant S_+(f, \mathcal{A})$.

Maintenant soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux subdivisions quelconques. Formons $\mathcal{C}$ en combinant les points utilisés dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{C}$ est « plus fine » que (ou égale à) $\mathcal{A}$ on a $S_-(f, \mathcal{C}) \geqslant S_-(f, \mathcal{A})$ car on peut imaginer passer de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{C}$ en lui ajoutant un par un des points supplémentaires distincts des précédents. Comme $\mathcal{C}$ est « plus fine » que $\mathcal{B}$ on a $S_+(f, \mathcal{C}) \leqslant S_+(f, \mathcal{B})$. Ainsi $S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant S_-(f, \mathcal{C}) \leqslant S_+(f, \mathcal{C}) \leqslant S_+(f, \mathcal{B})$ et donc :

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \quad S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant S_+(f, \mathcal{B})$$

Soit alors E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de toutes les valeurs possibles pour les sommes inférieures $S_-(f, \mathcal{A})$ associées à toutes les subdivisions possibles $\mathcal{A}$ et soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de toutes les valeurs possibles pour les sommes supérieures $S_+(f, \mathcal{B})$ associées à toutes les subdivisions possibles $\mathcal{B}$. Tout élément de F est un majorant de E donc au moins égal à $\sup E$. Ce nombre $\sup E$ est donc un minorant de F donc au plus égal à $\inf F$. En définissant $I_-(f) = \sup E$ et $I_+(f) = \inf F$ on a donc :

$$I_-(f) \leqslant I_+(f)$$

Soit f une fonction $\mathcal{R}$-intégrable. Elle est donc bornée par hypothèse, on notera $M = \sup f$ et $m = \inf f$. Réexaminons ce qui se passe lorsque l'on ajoute un point α à une subdivision $\mathcal{A}$ pour obtenir $\mathcal{A}'$. On a :

$$S_-(f, \mathcal{A}') - S_-(f, \mathcal{A}) = (\alpha - a_{j-1}) \inf_{a_{j-1} \leqslant x \leqslant \alpha} f(x) + (a_j - \alpha) \inf_{\alpha \leqslant x \leqslant a_j} f(x) - (a_j - a_{j-1}) m_j$$

On minore m_j par m et on majore les deux autres inf par M, ce qui donne :

$$(0 \leqslant)\ S_-(f, \mathcal{A}') - S_-(f, \mathcal{A}) \leqslant (a_j - a_{j-1})(M - m) \leqslant \delta(\mathcal{A})(M - m)$$

Supposons que l'on passe alors de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ en K étapes, on aura (puisque $\delta(\mathcal{A})$ majore les pas de chacune des subdivisions intermédiaires entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) :

$$S_-(f, \mathcal{B}) \leqslant S_-(f, \mathcal{A}) + K\delta(\mathcal{A})(M - m)$$

On prouve de même

$$S_+(f, \mathcal{B}) \geqslant S_+(f, \mathcal{A}) - K\delta(\mathcal{A})(M - m)$$

et donc

$$\Delta(\mathcal{B}) \geqslant \Delta(\mathcal{A}) - 2K\delta(\mathcal{A})(M - m)$$

lorsque $\mathcal{B}$ est obtenu en ajoutant au plus K points à $\mathcal{A}$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\mathcal{C}_1$ avec $I(f) - \epsilon \leqslant S_-(f, \mathcal{C}_1) \leqslant I(f)$ et $\mathcal{C}_2$ avec $I(f) \leqslant S_+(f, \mathcal{C}_2) \leqslant I(f) + \epsilon$. En combinant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en une seule subdivision plus fine $\mathcal{C}$ on aura donc

$I(f) - \epsilon \leqslant S_-(f, \mathcal{C}) \leqslant S_+(f, \mathcal{C}) \leqslant I(f) + \epsilon$. Soit K le nombre de points de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{A}$ quelconque et formons $\mathcal{B}$ en ajoutant à $\mathcal{A}$ les K points de $\mathcal{C}$. On aura

$$\Delta(\mathcal{A}) \leqslant \Delta(\mathcal{B}) + 2K(M - m)\delta(A) \leqslant 2\epsilon + 2K(M - m)\delta(A)$$

On a utilisé l'astuce que comme $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{C}$ on a $\Delta(\mathcal{B}) \leqslant \Delta(\mathcal{C}) \leqslant 2\epsilon$. En prenant $\delta > 0$ suffisamment petit on peut donc imposer $\Delta(\mathcal{A}) \leqslant 3\epsilon$ pour tout $\mathcal{A}$ avec $\delta(\mathcal{A}) \leqslant \delta$, ce qu'il fallait montrer au 3 près qui n'est pas important (on prendra le δ qui marche pour $\epsilon/3$). On remarque que le point crucial dans cette preuve c'est que l'entier K ne dépend que de ϵ, via le choix de $\mathcal{C}$, ce qui est complètement indépendant de $\mathcal{A}$. Le théorème de convergence lorsque le pas tend vers zéro est démontré.

4 Fonctions monotones

Montrons que toute f croissante sur l'intervalle $[a, b]$ est $\mathcal{R}$-intégrable. Elle est bornée puisque $\forall x \; f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Prenons la subdivision $\mathcal{A}_N$ à pas constant $\frac{b-a}{N}$. Dans chaque I_j comme f est croissante on aura $m_j = f(a_{j-1})$ et $M_j = f(a_j)$ de sorte que :

$$S_-(f, \mathcal{A}_N) = \frac{b-a}{N}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + \cdots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right)\right)$$

$$S_+(f, \mathcal{A}_N) = \frac{b-a}{N}\left(f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + \cdots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right) + f(b)\right)$$

Donc $\Delta(\mathcal{A}_N) = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a))$. Ainsi $\forall N \geqslant 1 \quad I_+(f) - I_-(f) \leqslant \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a))$ et en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $I_+(f) = I_-(f)$. Donc f est bien intégrable au sens de Riemann. On procéderait de même pour f décroissante.

On montrerait alors si l'on voulait que toute fonction $f = g - k$ différence de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$ est $\mathcal{R}$-intégrable. Cette remarque anodine pourrait être approfondie car les fonctions obtenues de cette manière ont, comme l'a montré Jordan, une autre caractérisation : celle d'être de « variation bornée ». Et les fonctions monotones par morceaux sur $[a, b]$, ainsi que les fonctions de classe C^1 par morceaux, sont de variation bornée.

5 Fonctions continues : première approche

Soit f continue sur $[a, b]$ et soit $\epsilon > 0$. Si pour tout x on a $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ on pose $a_1 = b$. Sinon il existe x avec $|f(x) - f(a)| \geqslant \epsilon$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe y avec $|f(y) - f(a)| = \epsilon$. On prend a_1 égal à l'infimum de tous ces y. En utilisant la continuité de f on constate que a_1 vérifie $|f(a_1) - f(a)| = \epsilon$. Donc $a_1 > a$ et pour tout $x \in [a, a_1]$ on a $|f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$. Remarquons dès maintenant que $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\epsilon$ si x et y sont tous deux dans $[a, a_1]$. Si $a_1 < b$ on réitère à partir de a_1, obtenant ainsi a_2, a_3, … Cela peut-il continuer indéfiniment ? Non, car sinon on aurait une suite croissante (a_j) donc convergente. Soit L sa limite. Comme f est continue et que $|f(a_{j+1}) - f(a_j)| = \epsilon$ on obtient en passant à la limite $|f(L) - f(L)| = \epsilon$. Contradiction. Donc au bout d'un nombre fini d'étapes on finit par avoir $a_N = b$. Remarquons que cela permet de voir que la fonction continue f est bornée sur l'intervalle $[a, b]$ puisque $\forall x\ |f(x) - f(a)| \leqslant N\epsilon$.

Les points a_j définissent une subdivision $\mathcal{A}$. Majorons $\Delta(\mathcal{A})$: dans chaque intervalle I_j de la subdivision on a $f(a_{j-1}) - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a_{j-1}) + \epsilon$, donc $f(a_{j-1}) - \epsilon \leqslant m_j \leqslant M_j \leqslant f(a_{j-1}) + \epsilon$ donc $M_j - m_j \leqslant 2\epsilon$. Ainsi :

$$\Delta(\mathcal{A}) \leqslant 2(b - a)\epsilon$$

Cela prouve $I_+(f) - I_-(f) \leqslant 2(b - a)\epsilon$ mais comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, c'est que $I_+(f) = I_-(f)$. La fonction continue f est bien intégrable au sens de Riemann.

6 Fonctions continues : continuité uniforme

On peut utiliser notre construction pour montrer que la fonction f est *uniformément continue* :

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$$

Il suffira de considérer les points a_j associés à $\frac{1}{3}\epsilon$. Soit $\lambda = \min_j(a_j - a_{j-1})$, qui est > 0. Posons $\delta = \frac{1}{2}\lambda$. Si $0 \leqslant y - x \leqslant \delta$, il n'y a aucun ou un seul indice j avec $x \leqslant a_j \leqslant y$. Dans le premier cas on a, comme vu précédemment, $|f(x)-f(y)| \leqslant 2\frac{1}{3}\epsilon$, et dans le deuxième $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(a_j)| + |f(a_j) - f(y)| \leqslant 2\frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$.

Il y a une formulation équivalente de la continuité uniforme : si $x_n - y_n \to 0$ alors $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. C'est un bon exercice que de passer d'une formulation à l'autre. La formulation avec les suites est utile pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue : par exemple avec $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{2}{n}$ on voit que $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, 1]$ n'est pas uniformément continue. De même la fonction $x\sin(x)$ sur l'intervalle fermé mais non borné $[0, +\infty[$ n'est pas uniformémement continue : on prendra $x_n = n\pi$ et $y_n = (n + \frac{1}{n})\pi$.

Réitérons cet énoncé fondamental : *toute fonction continue sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *est uniformément continue,* mais ce n'est plus nécessairement le cas si l'intervalle n'est pas un segment.

Une fois connue la continuité uniforme on peut en déduire (c'est ce que les gens font habituellement) la $\mathcal{R}$-intégrabilité. En effet notons

$$\omega_N = \sup\{|f(u) - f(v)| \ :\ \ |u - v| \leqslant \frac{b - a}{N},\ u, v \in [a, b]\}.$$

On a bien sûr $\omega_N \leqslant 2\sup|f|$. Si on prend la subdivision régulière de pas $(b-a)/N$, l'écart Δ_N entre sommes supérieure et inférieure est majoré par $(b - a)\omega_N$. Or la continuité uniforme équivaut justement au fait que $\lim\omega_N = 0$. Donc f est $\mathcal{R}$-intégrable.

Démontrons à nouveau cette fameuse continuité uniforme. La suite ω_N est décroissante. Si elle ne tend pas vers zéro, elle est minorée par un $\epsilon > 0$. Donc, on peut prendre pour chaque $N \geqslant 1$ un couple (u_N, v_N) avec $|u_N - v_N| \leqslant \frac{b-a}{N}$ et $|f(u_N) - f(v_N)| \geqslant \frac{1}{2}\epsilon$. On utilise alors le théorème de Bolzano-Weierstrass qui affirme qu'il existe un $x \in [a,b]$ et une suite extraite (u_{N_k}) de limite x. Donc $\lim v_{N_k} = x$ aussi puis $\lim |f(u_{N_k}) - f(v_{N_k})| = |f(x) - f(x)| = 0$, par continuité de f au point x. Contradiction.

7 Relation de Chasles, linéarité, positivité

Nous avons donc presque tout démontré de ce qui était annoncé. Supposons que f soit $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$ et soit $[c,d] \subset [a,b]$. Certainement f est à nouveau bornée sur $[c,d]$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $\mathcal{A}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que l'écart entre sa somme supérieure et sa somme inférieure soit au plus ϵ. On peut ajouter les points c et d à $\mathcal{A}$ ce qui ne peut que diminuer cet écart. Finalement soit $\mathcal{B}$ la subdivision de $[c,d]$ obtenue en ne retenant des points de $\mathcal{A}$ que ceux dans cet intervalle. L'écart entre la somme inférieure et la somme supérieure pour $\mathcal{B}$ sur l'intervalle $[c,d]$ est majoré par l'écart pour $\mathcal{A}$ sur $[a,b]$ donc par ϵ. Comme ϵ est arbitraire les intégrales inférieure et supérieure de f sur $[c,d]$ coïncident, ce qu'il fallait montrer.

Si on suppose que f est $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ alors d'abord elle est clairement aussi bornée sur $[a,c]$ $(a < b < c)$. Puis en prenant une subdivision de $[a,c]$ contenant le point b et suffisamment fine dans chacun des sous-intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ on rend l'écart entre sommes inférieure et supérieure sur $[a,c]$ arbitrairement petit. Donc f est $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,c]$ tout entier. En ce qui concerne la formule $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ pour $a < b < c$ il suffit de prendre des sommes de Riemann pour des subdivisions contenant le point intermédiaire b et de passer à la limite lorsque que le pas tend vers zéro.

Chasles : On conviendra que $\int_a^a f(x)dx = 0$ quelque soit f (définie au point a). Et on posera $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ si $b \geqslant a$. On a alors pour tout a, b, c, contenus dans un intervalle où f est $\mathcal{R}$-intégrable, quel que soit l'ordre :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

ce qui constitue la Relation de Chasles.

Linéarité : Si f est $\mathcal{R}$-intégrable alors il est à peu près évident que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction λf est $\mathcal{R}$-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$. De plus, si f et g sont $\mathcal{R}$-intégrables alors $f + g$ l'est aussi. Elle est certainement bornée. Ensuite soit $\epsilon > 0$. Prenons $\mathcal{A}$ avec $\Delta_f(\mathcal{A}) \leqslant \epsilon$ (notation auto-explicative) et $\mathcal{B}$ avec $\Delta_g(\mathcal{B}) \leqslant \epsilon$. Les combinant en une seule subdivision $\mathcal{C}$ on aura à la fois $\Delta_f(\mathcal{C}) \leqslant \epsilon$ et $\Delta_g(\mathcal{C}) \leqslant \epsilon$. Sur le j-ième intervalle on a $m_j(f) \leqslant f(x) \leqslant M_j(f)$ et $m_j(g) \leqslant$

$g(x) \leqslant M_j(g)$ donc $m_j(f)+m_j(g) \leqslant f(x)+g(x) \leqslant M_j(f)+M_j(g)$ donc $m_j(f+g) \geqslant m_j(f)+m_j(g)$ et $M_j(f+g) \leqslant M_j(f)+M_j(g)$ donc $M_j(f+g) - m_j(f+g) \leqslant (M_j(f) - m_j(f)) + (M_j(g) - m_j(g))$ donc $\Delta_{f+g}(\mathcal{C}) \leqslant \Delta_f(\mathcal{C}) + \Delta_g(\mathcal{C}) \leqslant 2\epsilon$. Comme ϵ est arbitraire c'est que $f+g$ est $\mathcal{R}$-intégrable. En utilisant une somme de Riemann on obtient :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Positivité et Monotonie : Si f est $\mathcal{R}$-intégrable et à valeurs positives ou nulles alors son intégrale est positive ou nulle (propriété de **positivité**) : immédiat en écrivant l'intégrale comme une limite de sommes de Riemann. Plus généralement :

$$\forall x \; f(x) \geqslant g(x) \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$$

On appelle cela la propriété de **monotonie** de l'intégrale de Riemann. Attention : $a \leqslant b$ dans cette inégalité ! On utilise souvent la conséquence (attention ici aussi $a \leqslant b$) :

$$\forall x \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Valeurs absolues : Si f est $\mathcal{R}$-intégrable alors $|f|$ l'est aussi. Preuve : On va utiliser pour cela l'inégalité $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|$ et aussi le fait que pour toute fonction bornée (prouvez-le !) :

$$\sup_{\alpha \leqslant x,y \leqslant \beta} |f(x) - f(y)| = (\sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x)) - (\inf_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x))$$

Vous en déduirez

$$\sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f(x)| - \inf_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f(x)| \leqslant \sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x) - \inf_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x)$$

puis pour toute subdivision $\Delta_{|f|}(\mathcal{A}) \leqslant \Delta_f(\mathcal{A})$. Conclure.

Comme la fonction $|f| - f$ est à valeurs positives ou nulles on a $\int_a^b |f(x)|dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$ et comme la fonction $|f| + f$ est à valeurs positives ou nulles on a $\int_a^b |f(x)|dx \geqslant -\int_a^b f(x)dx$ d'où :

$$a \leqslant b \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

La formule à utiliser si on ne sait pas $a \leqslant b$ est : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$.

8 Fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, on l'écrit $f = u + iv$ avec u et v ses parties réelle et imaginaire. On dira que f est $\mathcal{R}$-intégrable si u et v le sont et, bien sûr, on posera : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i \int_a^b v(x)\,dx$. L'inégalité :

$$a \leqslant b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

est alors valable. Pour la preuve, on commence d'abord par montrer que l'intégrale est $\mathbb{C}$-linéaire :

$$\int_a^b z\, f(t)\,dt = z \int_a^b f(t)\,dt$$

Ceci se vérifie en développant $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu)$, etc.. .. Prenons ensuite w un nombre complexe de module 1, avec $w \int_a^b f(t)\,dt \in [\,0\,, +\infty\,[$. Alors $| \int_a^b f(t)\,dt| = |w \int_a^b f(t)\,dt| = |\,\mathrm{Re}(w \int_a^b f(t)\,dt)| = |\,\mathrm{Re}(\int_a^b wf(t)\,dt)| = |\int_a^b \mathrm{Re}(wf(t))\,dt| \leqslant \int_a^b |\,\mathrm{Re}(wf(t))|\,dt \leqslant \int_a^b |wf(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Où l'on a utilisé entre autres la monotonie de l'intégrale.

Cependant on a triché car on a admis comme un fait évident que $|f|$ était $\mathcal{R}$-intégrable. Pour le prouver, il suffit d'observer la chose suivante :

$$\Big| |f(x)| - |f(y)| \Big| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)|$$

Donc, si x et y sont dans l'intervalle I_j d'une subdivision :

$$\Big| |f(x)| - |f(y)| \Big| \leqslant M_j(u) - m_j(u) + M_j(v) - m_j(v)$$

Comme on l'a déjà fait remarquer on a : $M_j(|f|) - m_j(|f|) = \sup_{x,y \in I_j} \Big| |f(x)| - |f(y)| \Big|$. Au final, pour toute subdivision :

$$\Delta_{|f|}(\mathcal{A}) \leqslant \Delta_u(\mathcal{A}) + \Delta_v(\mathcal{A})$$

Donc $|f|$ est bien $\mathcal{R}$-intégrable si f l'est.

9 Produits

Théorème : *Si* f *et* g *sont toutes deux $\mathcal{R}$-intégrables sur l'intervalle* $[\,a\,, b\,]$ *alors il en est de même de* fg.

Tout d'abord ce produit est bien borné. Ensuite, nous commençons par observer qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto (f(x) + C)g(x)$ est $\mathcal{R}$-intégrable, pour une constante C choisie arbitrairement. En effet $f(x)g(x) = (f(x)+C)g(x)-Cg(x)$

et on sait déjà que toute combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{R}$-intégrables est $\mathcal{R}$-intégrable. On prendra C de sorte que $\forall x\ f(x) + C \geqslant 0$. De même il suffit de montrer que $(f(x) + C)(g(x) + D)$ est $\mathcal{R}$-intégrable, avec un D quelconque : on le prendra de sorte que $\forall x\ g(x) + D \geqslant 0$. On notera que tout cela est possible parce que par hypothèse les fonctions f et g sont bornées (ce qui fait partie des conditions pour être $\mathcal{R}$-intégrable). En fin de compte, quitte à remplacer f par $f + C$ et g par $g + D$, on pourra supposer $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$. Sur le j^e intervalle d'une subdivision $\mathcal{A}$ quelconque :

$$0 \leqslant m_j(f) \leqslant f(x) \leqslant M_j(f) \qquad 0 \leqslant m_j(g) \leqslant g(x) \leqslant M_j(g)$$

Ainsi (notez bien que c'est grâce aux $0 \leqslant \dots$ que cela est valable) :

$$m_j(f)m_j(g) \leqslant f(x)g(x) \leqslant M_j(f)M_j(g)$$

d'où :

$$m_j(f)m_j(g) \leqslant m_j(fg) \leqslant M_j(fg) \leqslant M_j(f)M_j(g)$$

Or $M_j(f)M_j(g) - m_j(f)m_j(g) = (M_j(f) - m_j(f))M_j(g) + m_j(f)(M_j(g) - m_j(g))$ donc

$$0 \leqslant M_j(fg) - m_j(fg) \leqslant (M_j(f) - m_j(f))\sup(g) + (M_j(g) - m_j(g))\sup(f)$$

On a, bien sûr, noté $\sup(f)$ et $\sup(g)$ les bornes supérieures respectives de f et de g sur $[a, b]$. Si on prend maintenant $\mathcal{A}$ de sorte que $\Delta_f(\mathcal{A}) \leqslant \epsilon$ et $\Delta_g(\mathcal{A}) \leqslant \epsilon$, on en déduit $\Delta_{fg}(\mathcal{A}) \leqslant (\sup(f) + \sup(g))\epsilon$. Cela montre que l'on peut choisir $\mathcal{A}$ de sorte à rendre $\Delta_{fg}(\mathcal{A})$ arbitrairement petit : autrement dit on a prouvé la $\mathcal{R}$-intégrabilité de la fonction fg.

10 Divers

Si on modifie f en un nombre fini de points elle reste $\mathcal{R}$-intégrable et $\int_a^b f(x)dx$ reste identique ! Je vous laisse cette affirmation comme un excellent exercice. Je laisse également l'énoncé qui suit en exercice :

Théorème : *si* f *est bornée sur* $[a, b]$ *et* $\mathcal{R}$*-intégrable sur chaque* $[a + \eta, b]$ ($\eta > 0$) *alors elle est* $\mathcal{R}$*-intégrable sur* $[a, b]$.

11 Fonctions en escalier

On dit que f est en escalier si on peut trouver une subdivision $\mathcal{A}$ telle que f soit constante sur chaque $]x_{j-1}, x_j[$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Les valeurs de f aux x_j sont arbitraires. Par la relation de Chasles, la fonction f est intégrable au sens de Riemann et $I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_j (x_j - x_{j-1})f(\xi_j)$ où ξ_j est choisi arbitraire dans $]x_{j-1}, x_j[$.

Soit f une fonction $\mathcal{R}$-intégrable, soit $\mathcal{A}$ une subdivision quelconque. On considère la fonction en escalier U qui vaut $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$ sur $]x_{j-1}, x_j[$ et vaut

$\inf_{[a,b]} f$ aux points x_j. Cette fonction en escalier U vérifie $\forall x\ U(x) \leqslant f(x)$. De plus $\int_a^b U(x)dx$ est exactement identique avec la somme de Darboux inférieure $S_-(\mathcal{A}, f)$. De même si on définit V comme valant $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$ sur $]x_{j-1}, x_j[$ et $\sup_{[a,b]} f$ aux points x_j, alors $\forall x\ f(x) \leqslant V(x)$ et $S_+(\mathcal{A}, f) = \int_a^b V(x)\,dx$. On peut donc, si f est $\mathcal{R}$-intégrable, trouver pour tout $\epsilon > 0$ donné U et V en escaliers telles que $\forall x\ U(x) \leqslant f(x) \leqslant V(x)$ et $\int_a^b (V(x) - U(x))\,dx \leqslant \epsilon$.

Réciproquement, si $U \leqslant f$ alors certainement les sommes de Darboux inférieures pour U minorent celles pour f donc $\int_a^b U(x)dx \leqslant I_-(f)$, et si par ailleurs $V \geqslant f$ alors les sommes de Darboux supérieures pour V majorent celles pour f donc $\int_a^b V(x)dx \geqslant I_+(f)$. Donc $I_+(f) - I_-(f) \leqslant \int_a^b V(x)dx - \int_a^b U(x)dx$ à chaque fois que $U \leqslant f \leqslant V$. Si on peut rendre $\int_a^b (V(x) - U(x))\,dx$ plus petit que tout $\epsilon > 0$ c'est donc que f est $\mathcal{R}$-intégrable. On a donc caractérisé les fonctions $\mathcal{R}$-intégrales (réelles) comme étant les fonctions que l'on peut encadrer par deux fonctions en escalier U et V de sorte que $\int_a^b (V(x) - U(x))\,dx$ soit arbitrairement petit.

12 Limites uniformes

Théorème : *si* f *est la limite uniforme d'une suite de fonctions* f_n *$\mathcal{R}$-intégrables alors elle est $\mathcal{R}$-intégrable et* $\int_a^b f(t)\,dt = \lim \int_a^b f_n(t)\,dt$.

En effet pour tout $\epsilon > 0$ et pour $N \gg 1$ on a $f_N - \epsilon \leqslant f \leqslant f_N + \epsilon$ et $\int_a^b (f_N(x) + \epsilon) - (f_N(x) - \epsilon)\,dx = 2(b-a)\epsilon$ est arbitrairement petit. On imite alors la méthode de preuve de la section précédente. Et $\left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\right| \leqslant (b-a) \sup_t |f(t) - f_n(t)|$.

13 Composition avec une fonction continue

Supposons que $f : [a,b] \to [m,M]$ soit $\mathcal{R}$-intégrable. Soit $g : [m,M] \to \mathbb{R}$ continue.

Théorème : *la fonction composée* $g \circ f$ *est $\mathcal{R}$-intégrable.*

Soit $\epsilon > 0$. En utilisant la continuité uniforme de g on peut montrer qu'il existe k continue, affine par morceaux, avec $|k(t) - g(t)| \leqslant \epsilon$ sur $[m,M]$. Il existe une constante C avec $|k(t) - k(u)| \leqslant C|t-u|$ pour tous les t, u. Un petit instant de réflexion montre qu'alors $M_j(k\circ f) - m_j(k\circ f) \leqslant C(M_j(f) - m_j(f))$ pour toute subdivision, donc $\Delta(k \circ f) \leqslant C\Delta(f)$. Donc $k \circ f$ est $\mathcal{R}$-intégrable. Mais $|k(f(x)) - g(f(x))| \leqslant \epsilon$ pour tout x, et $\epsilon > 0$ est arbitraire. Donc $g \circ f$ est $\mathcal{R}$-intégrable. Je laisse au lecteur enthousiaste le cas où f est à valeurs complexes !

14 Les théorèmes fondamentaux du Calcul

La fonction $\mathbf{1}_{[a,x]}(t)$ qui vaut 1 pour $a \leqslant t \leqslant x$ et 0 pour $t > x$ (avec x fixé, dans l'intervalle $[a,b]$), est $\mathcal{R}$-intégrable, c'est une fonction en escalier. Pour toute fontion f $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$, sa restriction à $[a,x]$ est aussi $\mathcal{R}$-intégrable et $\int_a^x f(t)dt = \int_a^b \mathbf{1}_{[a,x]}(t)f(t)dt$.

Théorème : *si* f *est* $\mathcal{R}$*-intégrable sur* $[a,b]$, *alors l'intégrale indéfinie* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *est une fonction continue de* x.[3]

En effet, en la notant $F(x)$, on a $|F(x)-F(y)| \leqslant (\sup |f|)|x-y|$. Elle est donc même Lipschitzienne. Le Théorème suivant est peut-être plus fondamental encore :[1]

Théorème : *Si* f *est* $\mathcal{R}$*-intégrable*[2] *sur* $[a,b]$ *et si* x_0 *est un point de continuité de* f *alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable au point x_0 *et on a :*

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

J'en laisse la démonstration en exercice, tellement cette preuve est importante ! Son corollaire (existence de primitives) est souvent appelé « Théorème fondamental du calcul » :

Théorème fondamental du Calcul : *Si* f *est continue sur* $[a,b]$ *alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ *et on a :*

$$\forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f(x)$$

Autrement dit, lorsque f est continue :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

On notera soigneusement le signe moins qui apparaît lorsque l'on dérive par rapport à l'autre borne d'intégration :

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

3. bon exercice pour M312 : cela vaut aussi pour f Lebesgue-intégrable.

1. M312 : si f est intégrable au sens de Lebesgue (« $\mathcal{L}$-intégrable ») sur $[a,b]$ alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a la propriété d'être presque partout dérivable avec $F'(x) = f(x)$. Ce théorème de Lebesgue est, certainement, l'un des plus importants de la théorie de l'intégration. Nous en donnerons une preuve dans une autre annexe au Cours.

2. exercice pour M312 : cela vaut aussi pour f $\mathcal{L}$-intégrable

Avec les définitions à l'oeuvre dans la formule de Chasles, ces relations sont vraies que x soit inférieur ou supérieur à a ou à b, sous la contrainte bien sûr que f soit définie et continue sur tout l'intervalle allant de x à l'autre borne fixée.

Nous voyons donc que toute fonction continue admet une primitive. Cela peut être utilisé pour construire la fonction logarithme : $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt\ldots$. Mais comme vous le savez pour avoir passé des nuits à faire des centaines de calculs d'intégrales, on utilise la plupart du temps ce théorème dans le sens contraire : pour calculer l'intégrale d'une fonction on en recherche une primitive, par exemple en consultant des tables de dérivées. La formule fondamentale est alors :

$$\text{si } F' = f : \quad \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Pour la preuve à partir du Théorème fondamental, on remarque que la formule est certainement vraie pour la primitive particulière $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, et donc pour toute primitive.

Cet argument suppose la fonction f continue. En fait la formule est valable sous la seule hypothèse que $f = F'$ est Riemann-intégrable :

Deuxième Théorème fondamental du Calcul : *si* f *est* $\mathcal{R}$*-intégrable sur* $[a, b]$ *et si elle admet une primitive* F *alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

De manière équivalente : si la fonction dérivable F *a une dérivée* $f = F'$ *qui est* $\mathcal{R}$*-intégrable alors la formule vaut.*

Preuve : soit $N \geqslant 1$ et posons $x_j = a + j\frac{b-a}{N}$ pour $0 \leqslant j \leqslant N$. On écrit $F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots + (F(x_N) - F(x_{N-1}))$, et on applique le théorème des accroissements finis à chaque terme ; on voit donc apparaître une somme de Riemann pour $f = F'$. On fait tendre N vers l'infini, et on utilise l'hypothèse que f est $\mathcal{R}$-intégrable pour conclure.

** FIN DU RAPPEL DE PREMIÈRE ANNÉE **

Voici maintenant, (avec de petites modifications très mineures de la traduction par rapport à celle que l'on trouve dans l'édition française des œuvres de Riemann), des extraits du Mémoire d'Habilitation de Riemann, 1854, parution posthume en 1867. Sont concernées :

1. la notion de série absolument convergente et le théorème sur les séries semi-convergentes,
2. la définition de l'intégrale de Riemann,
3. la caractérisation donnée par Riemann des fonctions intégrables.

Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.

Bernhard Riemann

[Traduction publiée dans le *Bulletin des Sciences mathém. et astron.*, tome V ; juillet 1873][1]

[⋮]

§III.

En janvier 1829, parut dans le *Journal de Crelle*[2] un Mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont, en général, susceptibles d'intégration, et qui ne présentent pas une infinité de maxima et de minima.

Il arriva à la découverte du chemin à suivre pour obtenir la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes, suivant qu'elles restent ou non convergentes, lorsqu'on rend leurs termes tous positifs. Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quelconque ; dans les autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes. Si l'on désigne, en effet, dans une série de seconde classe, les termes positifs successifs par

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

et les termes négatifs par

$$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots,$$

il est clair que $\sum a$, ainsi que $\sum b$ doit être infinie ; car, si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe ; si une seule était infinie, la sére serait divergente. Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée C ; car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C

1. Ce Mémoire a été présenté par l'auteur, en 1854, à la Faculté de Philosophie pour son habilitation à l'Université de Göttingue. Bien que l'auteur ne semble pas l'avoir destiné à la publicité, l'impression de ce travail sans aucun changement de forme paraîtra suffisamment justifiée tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale.

Brunswick, juillet 1867. R. Dedekind.

2. Bd. IV. p. 157.

deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.

C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies ; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes ; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe.

[⋮]

Sur la notion de l'intégrale définie, et l'étendue de son domaine de validité.

§IV.

L'incertitude qui règne encore sur quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies nous oblige à placer ici quelques remarques sur la notion de l'intégrale définie, et sur la généralité dont elle est susceptible.

Et d'abord que doit-on entendre par $\int_a^b f(x)\,dx$?

Pour répondre à cette question, prenons entre a et b une série de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, rangées par ordre de grandeur, depuis a jusqu'à b, et désignons pour abréger $x_1 - a$ par δ_1, $x_2 - x_1$ par $\delta_2, \ldots$, $b - x_{n-1}$ par δ_n ; soit, en outre, ε une fraction positive strictement comprise entre zéro et un. Il est clair que la valeur de la somme

$$\begin{aligned} S \;=\; & \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots \\ & + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n) \end{aligned}$$

dépendra du choix des intervalles δ et des fractions ε. Si elle a la propriété, de quelque manière que les δ et les ε puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'une limite fixe A, quand les δ tendent tous vers zéro, cette limite est la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$. [⋮]

§V.

Recherchons maintenant l'étendue et la limite de la définition précédente, et posons-nous cette question : dans quels cas une fonction est-elle susceptible d'intégration ? dans quels cas ne l'est-elle pas ?

Considérons d'abord la définition de l'intégrale dans son sens le plus étroit, c'est-à-dire supposons que la fonction ne devienne pas infinie, et que la somme

S converge, quand tous les δ tendent vers zéro. Désignons la plus grande oscillation de la fonction entre a et x_1, c'est-à-dire la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur dans cet intervalle par D_1 ;[3] de même, les plus grandes oscillations entre x_1 et x_2 par $D_2, \ldots$, entre x_{n-1} et b par D_n ; alors la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

doit devenir infiniment petite avec les quantités δ. Supposons que la plus grande valeur que cette somme puisse prendre,[4] quand tous les δ sont plus petits que d soit Δ ; Δ sera alors une fonction de d, diminuant et devenant infiniment petite avec d. Maintenant, si la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes qu'une quantité σ est = s, la contribution de ces intervalles à la somme $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ sera évidemment $\geqslant \sigma s$. On aura donc

$$\sigma s \leqslant \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \leqslant \Delta, \text{ d'où } s \leqslant \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ peut d'ailleurs, si σ est donné, être rendu infiniment petit par un choix convenable de d ; il en sera donc de même de s, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que la somme S *converge, quand tous les* δ *deviennent infiniment petits, il faut non seulement que la fonction demeure finie, mais encore que la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont* > σ, *quelque soit* σ, *puisse être rendue infiniment petite par un choix convenable de* d.

Cette proposition admet une réciproque :

Si la fonction f(x) *est toujours finie, et si, par le décroissement indéfini de toutes les quantités* δ, *la grandeur totale* s *des intervalles dans lesquels les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'une quantité donnée* σ *peut toujours être rendue infiniment petite, la somme* S *converge quand tous les* δ *tendent vers zéro.*

Car ces intervalles, dans lesquels les oscillations sont > σ, apportent à la somme $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ une contribution plus petite que s multiplié par la plus grande oscillation de la fonction entre a et b, oscillation qui est finie (p. hyp.) : les autres intervalles donnent dans la somme une partie < $\sigma(b - a)$;[5] on peut prendre évidemment σ aussi petit qu'on le veut, et alors (p. hyp.) on peut déterminer la grandeur des intervalles de telle manière que s soit aussi petit qu'on le veut.

On peut donc rendre $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ aussi petit qu'on le veut, et, par suite, renfermer la somme S entre les limites aussi rapprochées qu'on le voudra.

Nous avons donc trouvé les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que la somme S converge, quand les intervalles δ tendent vers zéro, et, par

3. [jfb] On va comprendre cela comme la différence entre le sup et le inf, ceux-ci n'étant pas nécessairement atteints. La fonction est supposée bornée et intégrable au sens du paragraphe précédent.

4. [id.] Ici encore on pensera à un sup.

5. [id.] lire $\leqslant \sigma(b - a)$.

suite, pour qu'il puisse être question, dans le sens restreint, de l'intégrale de la fonction f(x) entre les limites a et b.

Si l'on étend, comme nous l'avons indiqué plus haut, la notion d'intégrale aux cas où la fonction devient infinie, [...], il faudra faire intervenir [la condition] suivante : que la fonction ne devienne infinie que lorsque son argument s'approche de certaines valeurs particulières, et que l'on obtienne une limite parfaitement déterminée, quand les limites des intégrations s'approchent indéfiniment de ces valeurs.