Université Lille1

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 1

1 Fonctions continues, fonctions intégrables

1.1 On considère la fonction $f : [0\ ,\ 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann. Existe-t-il des points x en lesquels f est continue ?

1.2 On considère la fonction $g : [0\ ,\ 1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sous forme irréductible, et $g(x) = 0$ sinon. En considérant des fonctions en escaliers majorant (et minorant) g, prouver que celle-ci est intégrable au sens de Riemann et que $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. Existe-t-il des points en lesquels g est continue ? plus précisément, quels sont les x en lesquels g est discontinue ?

1.3 La fonction g de l'exercice précédent est-elle continue par morceaux ? Quelle est la définition précise d'une fonction continue par morceaux

— sur un intervalle $[a\ ,\ b]$?
— sur un intervalle $]a\ ,\ b[$?
— sur la droite réelle toute entière ?

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$ est-elle continue par morceaux sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$?

1.4 Une fonction vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ peut-elle être intégrable sur $[0\ ,\ +\infty[$? Donner (ou plutôt construire/décrire) par contre des exemples de fonctions, positives, continues, ne vérifiant pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ mais néanmoins intégrables au sens généralisé sur $[0\ ,\ \infty[$.

1.5 Soit $f : [1\ ,\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$ intégrable (sous-entendu, au sens de Riemann généralisé). Montrer que la fonction $g : [1\ ,\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est, elle-aussi, intégrable au sens généralisé sur cet intervalle. Pour cet exercice (un exemple du critère de convergence dit de Abel-Dirichlet pour les intégrales impropres) on rappellera le critère de Cauchy pour l'existence d'une limite, et on pourra supposer f continue afin de faire des intégrations par parties appropriées. On évoquera la « seconde formule de la moyenne » pour le cas général.

1.6 Les intégrales de Riemann suivantes (de caractère « impropre », ou « généralisé » car sur un intervalle infini) sont de quels types : divergentes, semi-convergentes ou absolument convergentes ?

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

1.7 (Dirichlet) Soit F une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0\,,b]$ $(b>0)$. On examine l'intégrale

$$D(\lambda) = \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} F(x)\,dx$$

lorsque $\lambda \to +\infty$. On suppose que $L = \lim_{x\to 0} F(x)$ existe, et on redéfinit au besoin $F(0)$ via $F(0) = L$. En utilisant le Lemme de Riemann-Lebesgue avec par exemple $f(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x}$, prouvez les « théorèmes de Dirichlet » [1] :

$$\text{si } F'(0) \text{ existe,} \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} F(x)\,dx = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

$$\text{et, si } b<\pi, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(x)} F(x)\,dx = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Par un choix astucieux de b et de λ déduire par ailleurs du dernier résultat la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

1.8 (Noyau de Poisson) On pose, pour $0 < r < 1$:

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

Faites une étude de fonction de $P_r(t)$ et expliquez comment son graphe se déforme avec r lorsque ce dernier tend vers 1 par valeurs inférieures. En utilisant au besoin les complexes donnez une série représentant $P_r(t)$ et en déduire la valeur de son intégrale sur $[-\pi\,,+\pi]$. Soit maintenant $f(t)$ une fonction R-intégrable sur (les intervalles bornés de) $\mathbb{R}$ et continue en zéro. Prouvez, pour tout $\delta \in\,]0\,,2\pi]$:

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} P_r(t)f(t)\,dt = f(0)\,.$$

Généralisez au cas où f admet une limite à gauche et une limite à droite en zéro. Que se passe-t-il si $\delta \geqslant 2\pi$?

1. les guillemets sont mis car les théorèmes démontrés par Dirichlet (avant la définition par Riemann de son intégrale) faisaient des hypothèses sur F un peu différentes.

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 2

2 Espaces pré-hilbertiens (réels)

On travaille dans un espace préhilbertien réel H, qui peut être de dimension finie ou infinie (si la dimension est finie on parle d'espace euclidien). Le produit scalaire est noté $(\cdot\,,\cdot)$. La matrice de Gram de n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ est $G(\mathbf{v}) := \big((v_i\,, v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Le gramien est le déterminant de la matrice de Gram, il est noté $g(\mathbf{v})$. Le premier exercice, et d'autres peut-être, auront probablement déjà été vus en cours.

2.1 Montrer que si le système $\mathbf{v}$ est lié, son gramien est nul. En utilisant un système orthonormé montrer que si $\mathbf{v}$ est libre, son gramien est non nul et même strictement positif (il s'agit de mettre $G(\mathbf{v})$ sous une forme ${}^tAA$).

2.2 Soit $X = (x_i)$ une colonne avec n entrées réelles : montrez la formule

$$ {}^tX \cdot G(\mathbf{v}) \cdot X = \|x_1v_1 + \cdots + x_nv_n\|^2 $$

En déduire une nouvelle preuve de l'implication $g(\mathbf{v}) = 0 \implies$ lié.

2.3 On se donne $n + m$ vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ et $w_1, \ldots, w_m$ et on suppose que les w_j sont des combinaisons linéaires $w_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} p_{ij}v_i$. On note P la matrice rectangulaire avec n lignes et m colonnes dont les entrées sont les p_{ij}, donc symboliquement $\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot P$. Prouvez $\boxed{G(\mathbf{w}) = {}^tP \cdot G(\mathbf{v}) \cdot P}$. En déduire une relation de gramiens si $n = m$. Expliquez la formule symbolique $G(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

2.4 Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs linéairement indépendants et $V \subset H$ le sous-espace qu'ils engendrent. Soit x un vecteur de H et X la matrice colonne définie par $X_i = (x, v_i)$. Soit $y = \pi(x)$ sa projection orthogonale sur V et $Y = (y_i)$ la matrice colonne des coordonnées de $\pi(x)$ $(= y_1v_1+y_2v_2+\cdots+y_nv_n)$. Exprimer X en fonction de Y et Y en fonction de X. Exprimer $d(x, V)$ en fonction de $g(v_1, \ldots, v_n, x)$ et de $g(v_1, \ldots, v_n)$. Montrer l'inégalité :

$$ g(v_1, \ldots, v_n, x) \leqslant g(v_1, \ldots, v_n)g(x) $$

2.5 (suite) Montrer qu'il existe dans $V \subset H$ des vecteurs uniques $w_1, \ldots, w_n$ tels que la matrice $\big((w_i\,, v_j)\big)$ est la matrice identité. Quelle est la relation entre $G(\mathbf{w})$ et $G(\mathbf{v})$? Comment exprime-t-on π_V avec les w_j ?

2.6 (difficile) Montrer $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \forall (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in H^n,\ \forall (w_j)_{1\leqslant j\leqslant m} \in H^m$:

$$ g(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) \leqslant g(v_1, \ldots, v_n)g(w_1, \ldots, w_m) $$

Ce n'est pas un exercice facile. Une méthode en ramène la difficulté à cette étape intermédiaire qui est intéressante en elle-même :

$$g(w_1, \dots, w_m) \geqslant g(\pi(w_1) \dots, \pi(w_m)) ,$$

quelle que soit la projection orthogonale π sur un sous-espace $W \subset H$.

2.7 Soit $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q) = \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$. Que valent les (X^n , X^m) ? Calculez la matrice de Gram de $1, X, X^2$ et son inverse. Déterminez la projection orthogonale $a+bX+cX^2$ de X^3 sur $\mathbb{R}\cdot 1+\mathbb{R}\cdot X+\mathbb{R}\cdot X^2$ et aussi la valeur de $\left\|X^3 - a - bX - cX^2\right\|^2$.

2.8 Soit $H = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P , Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,dx$. Que valent les (X^n , X^m) ? Calculez la matrice de Gram de X, X^2, X^3, X^4 et son inverse. Déterminez la valeur des coefficients qui minimisent

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - \alpha t - \beta t^2 - \gamma t^3 - \delta t^4)^2\,dt$$

ainsi que la valeur de ce minimum. Donner un argument a priori qui implique $\alpha = \gamma = 0$.

Une note sur le cas hermitien

Supposons que le produit scalaire complexe (v,w) soit défini comme étant linéaire en v et conjugué-linéaire en w. Il vaut alors mieux définir $G(\mathbf{v})$ par $\big((v_j , v_i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ que par $\big((v_i , v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (dans le cas réel il n'y aurait pas de différence). Cela se voit à plusieurs choses.

2.9 Par exemple les formules des exercices 2.2 et 2.3 deviennent

$$X^* \cdot G(\mathbf{v}) \cdot X = \Big\|\sum_j x_j v_j\Big\|^2 \qquad G(\mathbf{w}) = P^* \cdot G(\mathbf{v}) \cdot P$$

ce qui utilise la notation usuelle $M^* := {}^t\overline{M}$ pour le conjugué hermitien. Mais que se passerait-il avec l'autre définition ?

2.10 Soit π la projection orthogonale sur un sous-espace V de dimension n de base $(v_1, \dots, v_n)$. Comment s'écrivent avec l'aide de $G(\mathbf{v})$ les coordonnées de $\pi(x)$ dans la base $\mathbf{v}$ de V ? et que se passe-t-il avec l'autre définition ?

2.11 On suppose maintenant que notre convention est que (v,w) est conjugué linéaire en v et linéaire en w. Quel est alors le « bon » choix pour une matrice de Gram ?

Université Lille1

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 3

3 Séries de Fourier

Le « noyau de Dirichlet » est systématiquement employé dans le contexte des séries de Fourier pour les fonctions 2π-périodiques :

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \sum_{n=-N}^{n=N} e^{int}\ .$$

On note $S_N(f)$ la N^e somme partielle de la série de Fourier d'une fonction f :

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\Big)\ .$$

C'est la projection orthogonale de f sur les polynômes trigonométriques de degrés au plus N, lorsque l'on utilise le produit scalaire $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Pour le moment nous travaillons avec des fonctions à valeurs réelles.

3.1 Rappeler les formules pour les coefficients de Fourier $a_n(f)$ ($n \geqslant 0$) et $b_n(f)$ ($n \geqslant 1$). Simplifier ces formules lorsque f est paire, ou impaire.

3.2 Montrer l'identité fondamentale $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$. Que valent $D_N(0)$, $\int_0^{2\pi} D_N(t)\,dt$ et $\int_0^{2\pi} D_N(t)^2\,dt$?

3.3 Montrer, pour toute fonction f Riemann-intégrable 2π-périodique :

$$S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x_0 - t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))\,dt$$

3.4 (Théorème de convergence ponctuelle « de Dirichlet ») Déduire du résultat précédent et de l'exercice 1.7 que l'on a

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}\Big(f(x_0^+) + f(x_0^-)\Big)$$

dès que f admet des limites à droite et à gauche en x_0 et aussi (en un sens que l'on précisera) des dérivées à droite et à gauche en ce même point.

3.5 Soit f une fonction 2π-périodique, continue, affine par morceaux : sur $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leqslant j \leqslant M$, $x_0 = 0$, $x_M = 2\pi$, on a $f' = \lambda_j$ constant. On pose $\lambda_{M+1} = \lambda_1$.

Prouver pour $n \geqslant 1$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^2} \sum_{1\leqslant j\leqslant M} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cos(nx_j) \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi n^2} \sum_{1\leqslant j\leqslant M} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \sin(nx_j)$$

En utilisant le Théorème de convergence de Dirichlet, montrer qu'il existe une certaine constante K dépendant des λ_i et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall N \geqslant 1 \quad \left|f(x) - S_N(f)(x)\right| \leqslant \frac{K}{N}\,.$$

3.6 (Approximation en norme L^2 et Identité de Parseval) Déduire de l'exercice précédent que l'identité de Parseval est valable pour les fonctions continues affines par morceaux ; puis pour la fonction « créneau » (2π pér. bien sûr) valant 0 sur $]0\,,a[$, C sur $]a\,,b[$, et 0 sur $]b\,,2\pi[$, pour certains $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$ et $C \in \mathbb{R}$; puis pour toutes les fonctions en escaliers, puis pour toutes les fonctions Riemann-intégrables (2π-périodiques). Autrement dit rédiger les détails des arguments donnés par le Professeur lors de son cours.

3.7 (Fonctions T-périodiques) Soit $T > 0$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$, puis $u_n(t) = \cos(n\omega t)$, $v_n(t) = \sin(n\omega t)$, montrer qu'elles sont T-périodiques. Comment définissez-vous le produit scalaire pour que les u_n ($n \geqslant 0$) et les v_n ($n \geqslant 1$) vérifient les mêmes relations d'orthogonalité que pour $T = 2\pi$, $\omega = 1$? Comment s'écrivent les formules de Fourier et l'identité de Bessel-Parseval ?

3.8 Justifier de deux manières l'identité suivante, en vérifiant au passage le célèbre résultat dû à Euler $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{1}{6}\pi^2$: d'une part par le Théorème de Dirichlet de convergence ponctuelle, d'autre part par l'identité de Parseval pour des fonctions bien choisies.

$$0 \leqslant x \leqslant \pi \implies \sum_{n=1} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}$$

3.9 Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. Déterminer (en distinguant soigneusement $|r| < 1$ de $|r| > 1$) les séries de Fourier des fonctions 2π-périodiques :

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}$$

On pensera (si $r \neq 0$) à utiliser $1 - 2r\cos(t) + r^2 = (1 - z)(1 - r^2 z^{-1})$ avec $z = re^{it}$. Que valent, comme fonctions de $A, B > 1$ (ou de $r = e^{-u}, s = e^{-v}$ avec $u, v > 0$

choisis tels que ch(u) = A et ch(v) = B) les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(A-\cos(t))^2}\,, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(B-\sin(t))^2}\,, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(A-\cos(t))(B-\sin(t))}\ ?$$

3.10 Soit $r \in\,]-1\,,+1[$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer (par le calcul des dérivées par rapport à t ou via un logarithme complexe) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(nt)}{n} = \mathrm{Arctg}\Big(\frac{r\sin(t)}{1-r\cos(t)}\Big)$$

En déduire (en invoquant le Théorème d'Abel pour le passage à la limite) la somme de la série lorsque $r = \pm 1$. Et que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(nt)}{n}$? Et pour $r = \pm 1$? Et est-ce alors la série de Fourier d'une fonction Riemann-intégrable ?

4 Produits scalaires et séries de Fourier complexes

4.1 Rappeler les formules pour les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer les c_n en fonction des a_n, b_n, et réciproquement. Rappeler comment s'exprime l'identité de Parseval avec les $c_n(f)$. Que vaut (f, g) en fonction des $c_n(f)$ et des $c_n(g)$? Que vaut, en fonction de ces mêmes coefficients

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt\ ?$$

Et en fonction des a_n et b_n ?

4.2 Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = i(\pi - t)$ sur $[0\,, 2\pi[$.

(a) Montrer $c_n(f) = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Déterminer aussi $c_n(f)$ pour $n \leqslant 0$.

(b) Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes ; montrer :

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{a_j a_k}{j+k-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-ijt}\Big)^2 e^{it} f(t)\,dt\,.$$

(c) En déduire l'inégalité de Hilbert :

$$\Bigg|\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{a_j a_k}{j+k-1}\Bigg| \leqslant \pi \sum_{j=1}^{n} |\,a_j\,|^2\,.$$

4.3 Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux, et soit g la fonction définie par $g(x) = f'(x)$ aux points de dérivabilité de f et par $g(x) = 0$ ailleurs. Comment reliez-vous les coefficients de Fourier de f et ceux de g ? et si f est supposée, de plus, continue ?

4.4 Soit f continue, telle que $\forall K \geqslant 1\ a_n(f), b_n(f) = O(n^{-K})$. Montrer que f est infiniment dérivable. Et si f est supposée continue par morceaux ?

4.5 On admettra $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{3q^2}$ pour $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(i) Établir : $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \left|e^{2\pi i n\sqrt{2}} - 1\right| > \dfrac{4}{3\,|\,n\,|}$.

(ii) Soit g une fonction continue 1-périodique. Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[0, 1]$, 1-périodique, et vérifiant

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + \sqrt{2}) - f(x) = g(x)$$

Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f ?

(iii) Soit g une fonction 1-périodique de classe C^∞. Déterminer sous quelle condition sur g il existe une fonction 1-périodique R-intégrable sur $[0, 1]$ et vérifiant $(*)$. Montrer que toutes les solutions continues par morceaux sont de classe C^∞.

4.6 Soit H un espace préhilbertien complexe de dimension infinie, et soit $(x_i)_{i\geqslant 1}$ une suite dans H avec $\|x_i\| = 1$ pour tout i, et vérifiant

$$\exists C \geqslant 0 \qquad i \neq j \implies \|x_i - x_j\| \geqslant C\,.$$

Montrer

$$N(N-1)C^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq N} \|x_i - x_j\|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq N} (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2) = 2N^2\,,$$

et en déduire $C \leqslant \sqrt{2}$. Peut-on avoir $C = \sqrt{2}$?

4.7 Soit F un espace vectoriel de fonctions continues sur $[0, 1]$, sur lequel les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes : il existe $K < \infty$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_2$ pour toute $f \in F$ (dans l'autre sens, on a de manière évidente $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$).

(A) Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un système orthonormé fini de F. Montrer pour tous $t \in [0, 1]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$:

$$|\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)| \leqslant K \cdot (\,|\,\lambda_1\,|^2 + \cdots + |\,\lambda_n\,|^2)^{1/2}$$

(B) Montrer par un bon choix des λ_i :

$$\forall t \in [0, 1],\ \ |\,f_1(t)\,|^2 + \cdots + |\,f_n(t)\,|^2 \leqslant K \cdot (\,|\,f_1(t)\,|^2 + \cdots + |\,f_n(t)\,|^2)^{1/2}$$

(C) En déduire finalement $n \leqslant K^2$. Conclusion ?

Université Lille1

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 4

5 Équations différentielles linéaires

5.1 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ une matrice rectangulaire à coefficients réels ou complexes et $\|A\| = (\sum|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ sa norme de Frobenius. Montrer

$$\|A \cdot B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

lorsque les dimensions autorisent la formation du produit matriciel AB.

5.2 On suppose que $A(t) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ dépend continûment de $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer $\left\|\int_{t_0}^{t} A(u)\,du\right\| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\|\,du\right|$ pour $t_0, t \in I$.

5.3 Montrer $e^{A+B} = e^A e^B$ lorsque les matrices carrées A et B à coefficients réels ou complexes vérifient $AB = BA$. Indication : calculer la dérivée par rapport à t de $e^{tA}e^{tB}$, puis utiliser le résultat du cours sur la résolvante d'un système linéaire à coefficients constants.

5.4 Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}$. Que vaut e^A ? On calculera d'abord $e^{\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}}$, par exemple en utilisant un système différentiel ou plus directement en imitant la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

5.5 Montrer pour toute matrice carrée A et matrice inversible S de la même taille $Se^AS^{-1} = e^{SAS^{-1}}$. En déduire (trigonaliser) le polynôme caractéristique de e^A en fonction de celui de A et prouver $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\,A}$.

5.6 On suppose que les matrices carrées $A(t)$ commutent deux-à-deux. Avec $V_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A(u)\,du\right)^k$, montrer $V_k'(t) = A(t)V_{k-1}(t)$ pour $k \geqslant 1$ (attention, la commutativité est essentielle). En déduire que la résolvante du système différentiel homogène associé est dans ce cas $T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)\,du}$.

5.7 (suite) On considère un système différentiel :

$$(S)\begin{cases} f'(t) = a(t)f(t) - b(t)g(t) \\ g'(t) = b(t)f(t) + a(t)g(t) \end{cases}$$

Déterminer la résolvante du système (S). Montrer que les fonctions $f(t) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} \sin(ut)\,du$, $g(t) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} \cos(ut)\,du$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions d'un système du type (S). En déduire leurs expressions.

5.8 Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Résoudre directement le système différentiel associé. En déduire e^{tA} puis finalement les A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.9 (Bessel d'ordre zéro) Étudier l'équation de Bessel :

$$t\,y'' + y' + t\,y = 0 \qquad \textbf{(J}_0\textbf{)}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution f (à un multiple près) sur $]0, +\infty[$ qui dans un voisinage de 0 est de la forme $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.
2. Montrer que S a rayon de convergence infini et que sa somme f est l'unique solution de **(J$_0$)** sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On s'intéressera au Wronskien $w(f, g)$ de f et d'une autre solution éventuelle g.
3. Par une étude plus précise, donner le comportement asymptotique pour $x \to 0^+$ des autres solutions que f et ses multiples.
4. On pose $z = \sqrt{t}\,y$, sur $]0, +\infty[$. Quelle est l'équation vérifiée par z ?
5. Montrer en considérant une équation inhomogène bien choisie :

$$z(t) = A\cos t + B\sin t - \int_1^t \frac{z(u)}{4u^2} \sin(t-u)\,du,$$

   où A et B sont des constantes.
6. Montrer que z est bornée pour $t \geqslant 1$.
7. En déduire que toute solution de l'équation de Bessel vérifie :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad y(t) = \frac{\alpha\cos t + \beta\sin t}{\sqrt{t}} + O_{t\to+\infty}(t^{-3/2}).$$

6 Équations non-linéaires

6.1 Déterminer la solution maximale de l'équation : $y' = y^4$, vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

6.2 Déterminer les solutions maximales de l'équation $y' = \sin(y)$ en discutant suivant la valeur de $y(0) = y_0$.

6.3 (Riccati) On considère l'équation non-linéaire $y' = ay^2 + by + c$ avec a, b, c continues sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire du birapport $[y_1 : y_2 : y_3 : y_4]$ de quatre solutions distinctes ? Ind. : montrer que $(y_1-y_2)(y_3-y_4)$ et $(y_1-y_3)(y_2-y_4)$ sont solutions de la même équation différentielle linéaire.