Université Lille1

Master 1 enseignement 2012/2013
Analyse 2 – Feuille 4

5 Équations différentielles linéaires

5.1 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ une matrice rectangulaire à coefficients réels ou complexes et $\|A\| = (\sum |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ sa norme de Frobenius. Montrer

$$\|A \cdot B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

lorsque les dimensions autorisent la formation du produit matriciel AB.

5.2 On suppose que $A(t) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ dépend continûment de $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer $\left\|\int_{t_0}^{t} A(u)\,du\right\| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\|\,du\right|$ pour $t_0, t \in I$.

5.3 Montrer $e^{A+B} = e^A e^B$ lorsque les matrices carrées A et B à coefficients réels ou complexes vérifient $AB = BA$. Indication : calculer la dérivée par rapport à t de $e^{tA}e^{tB}$, puis utiliser le résultat du cours sur la résolvante d'un système linéaire à coefficients constants.

5.4 Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}$. Que vaut e^A ? On calculera d'abord $e^{\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}}$, par exemple en utilisant un système différentiel ou plus directement en imitant la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

5.5 Montrer pour toute matrice carrée A et matrice inversible S de la même taille $Se^AS^{-1} = e^{SAS^{-1}}$. En déduire (trigonaliser) le polynôme caractéristique de e^A en fonction de celui de A et prouver $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\,A}$.

5.6 On suppose que les matrices carrées $A(t)$ commutent deux-à-deux. Avec $V_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t} A(u)\,du\right)^k$, montrer $V_k'(t) = A(t)V_{k-1}(t)$ pour $k \geqslant 1$ (attention, la commutativité est essentielle). En déduire que la résolvante du système différentiel homogène associé est dans ce cas $T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)\,du}$.

5.7 (suite) On considère un système différentiel :

$$(S)\begin{cases} f'(t) = a(t)f(t) - b(t)g(t) \\ g'(t) = b(t)f(t) + a(t)g(t) \end{cases}$$

Déterminer la résolvante du système (S). Montrer que les fonctions $f(t) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\sin(ut)\,du$, $g(t) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\cos(ut)\,du$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions d'un système du type (S). En déduire leurs expressions.

5.8 Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Résoudre directement le système différentiel associé. En déduire e^{tA} puis finalement les A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.9 (Bessel d'ordre zéro) Étudier l'équation de Bessel :

$$t\,y'' + y' + t\,y = 0 \qquad (J_0)$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution f (à un multiple près) sur $]0, +\infty[$ qui dans un voisinage de 0 est de la forme $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.
2. Montrer que S a rayon de convergence infini et que sa somme f est l'unique solution de (J_0) sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On s'intéressera au Wronskien $w(f, g)$ de f et d'une autre solution éventuelle g.
3. Par une étude plus précise, donner le comportement asymptotique pour $x \to 0^+$ des autres solutions que f et ses multiples.
4. On pose $z = \sqrt{t}\,y$, sur $]0, +\infty[$. Quelle est l'équation vérifiée par z ?
5. Montrer en considérant une équation inhomogène bien choisie :

$$z(t) = A\cos t + B\sin t - \int_1^t \frac{z(u)}{4u^2}\sin(t-u)\,du,$$

   où A et B sont des constantes.
6. Montrer que z est bornée pour $t \geqslant 1$.
7. En déduire que toute solution de l'équation de Bessel vérifie :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad y(t) = \frac{\alpha\cos t + \beta\sin t}{\sqrt{t}} + O_{t\to+\infty}(t^{-3/2})\,.$$

6 Équations non-linéaires

6.1 Déterminer la solution maximale de l'équation : $y' = y^4$, vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

6.2 Déterminer les solutions maximales de l'équation $y' = \sin(y)$ en discutant suivant la valeur de $y(0) = y_0$.

6.3 (Riccati) On considère l'équation non-linéaire $y' = ay^2 + by + c$ avec a, b, c continues sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire du birapport $[y_1 : y_2 : y_3 : y_4]$ de quatre solutions distinctes ? Ind. : montrer que $(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)$ et $(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)$ sont solutions de la même équation différentielle linéaire.